

THESE

pour l'obtention du Grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE POITIERS

(Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées)

(Diplôme National - Arrêté du 25 avril 2002)

Ecole Doctorale : Sciences Pour l'Ingénieur

Secteur de Recherche : Mécanique des Milieux Fluides

Présentée par :

Sylvain Laizet

*Développement d'un code de calcul combinant des
schémas de haute précision
avec une méthode de frontière immergée pour la
simulation des mouvements
tourbillonnaires en aval d'un bord de fuite*

Directeur de thèse : Eric LAMBALLAIS

*Soutenue le 13 décembre 2005
devant la Commission d'Examen*

- JURY -

C. BRUN	Maître de conférence, Polytech' Orléans	Examineur
P. COMTE	Professeur, Université de Poitiers	Examineur
C. DA SILVA	Professeur, Université Technique de Lisbonne (IST)	Rapporteur
J. DELVILLE	Ingénieur de recherches C.N.R.S., Université de Poitiers	Examineur
E. LAMBALLAIS	Professeur, Université de Poitiers	Examineur
F. NICOUD	Professeur, Université de Montpellier	Rapporteur

Remerciements

Cette thèse a été réalisée au Laboratoire d'Etudes Aérodynamiques de Poitiers sous la direction d'Eric Lamballais. Je remercie donc Jean-Paul Bonnet et Yves Gervais pour m'avoir accueilli au sein du laboratoire.

Je tiens à remercier vivement le professeur Eric Lamballais sans qui je n'aurais pas pu découvrir le monde fabuleux de la recherche. Il a eu le courage de me prendre en DEA et de continuer l'aventure avec moi en thèse...Il a su me proposer un sujet des plus passionnants à étudier. Ses connaissances scientifiques et ses critiques pertinentes m'ont été très profitables. Je le remercie également pour sa grande disponibilité durant toutes ces années, ce qui nous a permis d'avoir de nombreuses discussions très enrichissantes.

Mes remerciements s'adressent également à Messieurs Carlos Da Silva et Franck Nicoud pour avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Je tiens également à remercier les autres membres du jury : Christophe Brun, Pierre Comte et Joël Delville.

Les calculs présents dans cette thèse ont été réalisés sur les super calculateurs de l'IDRIS auquel j'exprime ma profonde reconnaissance. Je tiens à remercier plus particulièrement Jean-Marie Teuler et Jalel Chergui pour leur aide très précieuse. Merci également à Laurent Perret pour nos discussions très instructives et pour m'avoir donné un accès intégral à l'ensemble de ses données expérimentales.

Je souhaite également exprimer ma profonde gratitude auprès du service informatique du laboratoire. Je remercie plus particulièrement Valérie Lefeuvre, Francis Boissonneau et Vincent Hurtevent qui ont toujours répondu présent avec rapidité et gentillesse lorsque j'en avais besoin. Je remercie sincèrement de façon plus générale l'ensemble du personnel du laboratoire.

Je tiens à souligner ici que j'ai passé trois années formidables aux cotés des thésards du laboratoire. Je ne pourrais pas ici citer tout le monde malheureusement, mais j'ai une pensée particulière pour le collectif de l'Apérothon de Poitiers et pour mes quatre camarades de DEA : Alexandre, David, Sabrina et Younes. Je remercie également tous mes amis hors laboratoire plus particulièrement (dans l'ordre alphabétique) : Bérangère, Camille, Delphine, Estelle, Manou, Nadège et Sandrine... (Je ne cite que les filles)

Je voudrais également remercier tous mes proches, plus particulièrement ceux qui ont fait le déplacement le jour de ma soutenance pour venir entendre parler de mécanique des fluides numérique et de turbulence alors qu'ils n'y comprennent pas grand chose, un grand merci pour votre soutien !

Pour finir, je souhaite remercier les deux personnes qui sont à l'origine de tout, ma maman et mon papa, qui m'ont toujours soutenu financièrement et moralement dans mon parcours post-bac pour le moins sinueux. Je leur dédie donc cette thèse.

Table des matières

1	Introduction	19
2	Méthodes numériques	23
2.1	Les équations du mouvement	23
2.2	Les conditions aux limites	24
2.2.1	Conditions aux limites dans la direction longitudinale	24
2.2.2	Conditions dans les directions transversales	27
2.3	Schémas de discrétisation temporelle	27
2.4	Méthode de modélisation par forçage	30
2.5	Schémas de discrétisation spatiale	34
2.5.1	Généralités	34
2.5.2	Formulation matricielle	35
2.6	Résolution de l'équation de Poisson	37
2.6.1	Rappel sur les transformées de Fourier	38
2.6.2	Equivalence entre les différents opérateurs	39
2.6.3	Formulation pour le solveur de Poisson	40
2.7	Limitations de cette version du code de calcul	42
3	Développements numériques	45
3.1	Nouvelle version du solveur de Poisson	46
3.1.1	Principe de la méthode	47
3.1.2	Application à la résolution de l'équation de Poisson	53
3.2	Décalage du champ de pression	56
3.2.1	Schémas compacts sur une grille décalée	58
3.2.2	Modification du solveur de Poisson	59
3.3	Discrétisation sur un maillage inhomogène	62
3.3.1	La dérivée première	63
3.3.2	La dérivée seconde	64
3.3.3	Choix de la fonction de raffinement	64
3.3.4	Equivalence des opérateurs pour la dérivée première	68
3.3.5	Modification du solveur de Poisson	68
3.4	Synthèse	71

4	Validation des développements numériques	73
4.1	Les tourbillons de Taylor-Green	74
4.2	La cavité entraînée	76
4.3	La couche de mélange temporelle	80
4.3.1	Présentation de l'écoulement	80
4.3.2	Influence de l'ordre des schémas et de l'arrangement de la grille de pression sur l'écoulement	81
4.4	Écoulement derrière un cylindre	84
4.4.1	Simulation 2D pour un sillage stationnaire à $Re = 40$	86
4.4.2	Simulation 3D pour un sillage instationnaire à $Re = 300$	89
4.5	Synthèse générale	96
5	Configuration étudiée : la couche de mélange	97
5.1	L'écoulement de couche de mélange	97
5.1.1	Notion de structures cohérentes	98
5.1.2	Dynamique de l'écoulement de couche de mélange	102
5.2	Généralité sur la stabilité des écoulements cisailés libres	105
5.3	Influence de l'effet de sillage sur l'écoulement	108
5.4	Synthèse	110
6	La couche de mélange épaisse	111
6.1	Calculs préliminaires	112
6.1.1	Configuration de l'écoulement	112
6.1.2	L'écoulement miroir dans la plaque séparatrice	114
6.1.3	Influence du bord de fuite et détermination de la longueur de la plaque	115
6.1.4	Influence du rapport de vitesse r	118
6.1.5	Influence des conditions initiales	121
6.2	La couche de mélange épaisse à $Re_{cm} = 400$	122
6.2.1	Configuration de l'écoulement	123
6.2.2	Paramètres de la simulation	123
6.2.3	Visualisation des champs instantanés	125
6.2.4	Étude statistique	125
6.2.5	Synthèse et perspectives	134
7	La couche de mélange classique	135
7.1	Calculs préliminaires	136
7.1.1	Configuration de l'écoulement	136
7.1.2	Détermination de l'angle du profil biseauté	137
7.1.3	Influence de la condition d'entrée sur la dynamique de l'écoulement	137
7.1.4	Influence du rapport de vitesse r	139
7.2	La couche de mélange classique à $Re_{cm} = 400$	140
7.2.1	Configuration de l'écoulement	140
7.2.2	Paramètres des simulations	141

7.2.3	Visualisation des champs instantanés	142
7.2.4	Etude statistique	144
7.2.5	Synthèse	148
8	Conclusions et perspectives	153
A	Opérateurs aux différences finies	165
A.1	Formulation matricielle sur un maillage décalé	165
B	La Transformée de Fourier Rapide Décalée (<i>TFRD</i>)	169
C	La couche de mélange temporelle	173
C.1	Visualisation de la vorticité sur un maillage inhomogène	173
D	Articles	179

Liste des tableaux

2.1	Valeurs de σ_i et σ_r pour les différents schémas de discrétisation temporelle du code de calcul	28
2.2	Possibilités et limitations du code Incompact3d dans sa version antérieure pour des simulations tridimensionnelles. Légende : Dirich. : Condition aux limites de type Dirichlet; Périod. : Condition aux limites périodique; Gliss. : condition aux limites de type glissement libre; Inhomog. : utilisation d'un maillage inhomogène dans la direction considérée; Décal. : utilisation de schémas Hermitiens décalés dans la direction considérée.	43
3.1	Comparaison entre les possibilités du nouveau code Incompact3d avec la version antérieure pour des simulations tridimensionnelles après la bascule en Fortran 90 et le changement des sous-routines pour les transformées de Fourier rapides.	46
3.2	Comparaison entre les possibilités du nouveau code Incompact3d avec la version antérieure pour des simulations tridimensionnelles après la modification de solveur de Poisson.	56
3.3	Comparaison entre les possibilités du nouveau code Incompact3d avec la version antérieure pour des simulations tridimensionnelles avec la mise en œuvre des schémas décalés.	62
3.4	Comparaison entre les possibilités du nouveau code Incompact3d avec la version antérieure pour des simulations tridimensionnelles.	72
4.1	Paramètres des simulations sur un maillage collocalisé. $\Delta\xi$ représente indifféremment Δx ou Δy	83
4.2	Paramètres des simulations sur un maillage décalé. $\Delta\xi$ représente indifféremment Δx ou Δy	83
4.3	Paramètres des simulations. $\Delta\xi$ représente indifféremment Δx , Δy ou Δz . R_1 correspond à la résolution ($361 \times 217 \times 48$) et R_2 correspond à la résolution ($181 \times 109 \times 24$) (*) Simulations de référence réalisées par Parnaudeau et al. [80]	90
6.1	Paramètres des simulations en couche de mélange épaisse bidimensionnelle pour déterminer l'influence du rapport de vitesse r sur l'écoulement.	119

6.2	<i>Paramètres des simulations en couche de mélange épaisse bidimensionnelle pour déterminer l'influence de la perturbation sur la condition d'entrée . .</i>	121
7.1	<i>Paramètres des simulations en couche de mélange classique bidimensionnelle pour la détermination de l'angle α.</i>	137
7.2	<i>Paramètres des simulations en couche de mélange classique bidimensionnelle pour déterminer l'influence de la perturbation sur la condition d'entrée</i>	138
7.3	<i>Paramètres des simulations en couche de mélange classique bidimensionnelle pour déterminer l'influence du rapport de vitesse λ sur l'écoulement. .</i>	140

Table des figures

2.1	<i>Vue schématique de deux types de domaines solides Ω_1 et Ω_2 au sein d'un milieu fluide Ω_f, le tout considéré dans le domaine de calcul $\Omega = \Omega_f \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$.</i>	31
2.2	<i>Méthode d'écoulement inverse pour appliquer le forçage. D'après Parnaudau [79]</i>	33
2.3	<i>Illustration des deux types de conditions aux limites rencontrés dans le cas du glissement libre.</i>	35
3.1	<i>Exemple d'un traitement spectral de la fonction $f(x) = x$. Gauche : Visualisation de la fonction $y = x$. Droite : Visualisation de la dérivée calculée spectralement et avec des schémas aux différences finies décalées d'ordre 2.</i>	47
3.2	<i>Exemple d'un traitement spectral de la fonction apériodique $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$. Gauche : Visualisation de la fonction. Droite : Visualisation de la dérivée calculée spectralement et avec des schémas aux différences finies décalées d'ordre 2 (les courbes sont confondues).</i>	49
3.3	<i>Figure de gauche : Visualisation du phénomène de Gibbs. Courbe obtenue par la différence entre la dérivée exacte et la dérivée calculée spectralement et entre la dérivée exacte et une dérivée calculée avec un schéma Hermitien d'ordre 6 de la fonction $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$. Figure de droite : Décroissance de l'erreur avec le nombre de points. La ligne pleine correspond à une décroissance d'ordre 2 en n_x^{-2}. Symboles : $\bullet$: Erreur du schéma décalé d'ordre 2. $\circ$: Erreur de la dérivée calculée spectralement.</i>	49
3.4	<i>Illustration de la condition aux limites utilisées. Les points -1 et -2 sont des points «fantômes».</i>	50
3.5	<i>Evolution longitudinale de l'ordre de l'erreur basée sur la différence en un point entre la valeur exacte de la dérivée et son estimation spectrale pour la fonction $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$.</i>	52
3.6	<i>Isocontours du champ de pression autour d'un cylindre d'une SND à Reynolds 40 sur un maillage colocalisé.</i>	57
3.7	<i>Schémas représentant les deux types de maillage que l'on peut rencontrer dans le code de calcul.</i>	58

3.8	<i>Représentation du nombre d'onde modifié k' en fonction du nombre d'onde k pour divers schémas centrés sur un maillage décalé. Gauche : Schémas collocalisés; droite : Schémas décalés</i>	61
3.9	<i>Illustration d'un raffinement important au centre du maillage ($\alpha = 1$ et $\beta = 0.1$) pour $n_y = 32$.</i>	67
3.10	<i>Illustration d'un raffinement plus lâche au centre du maillage ($\alpha = 1$ et $\beta = 1$) pour $n_y = 32$.</i>	67
4.1	<i>A gauche : Tourbillons de Taylor-Green (conditions aux limites périodiques ou de type glissement libre) représentées par les lignes de courant. A droite : Décroissance de l'erreur avec le nombre de points ($n_x = n_y$ dans chaque direction). La ligne pleine correspond à une décroissance d'ordre 6 en n_x^{-6}. Symboles : $\cdots$: Erreur calculée sur une grille collocalisée. — — — : Erreur calculée sur une grille décalée pour la pression. Les deux courbes se superposent. Les deux simulations ont été réalisées avec des conditions aux limites périodiques.</i>	75
4.2	<i>Configuration de l'écoulement (D'après Shih et al. [93]).</i>	76
4.3	<i>L'écoulement dans la cavité entraîné représenté par des lignes de courant pour $Re = 1$.</i>	77
4.4	<i>Evolution de l'erreur en fonction du nombre de points $n_x = n_y$ dans chaque direction. La ligne pleine correspond à une décroissance d'ordre 2 en n_x^{-2}. Symboles : $\cdots$: Erreur calculée sur une grille collocalisée. — — — : Erreur calculée sur une grille décalée pour la pression. Gauche : simulation réalisée avec des schémas d'ordre 2. Droite : simulation réalisée avec des schémas d'ordre 6.</i>	78
4.5	<i>Configuration de l'écoulement.</i>	81
4.6	<i>Illustration des différents maillage ($N_y = 501, 129, 65$ et 33 points) sur une partie de la boîte de calcul : $((0; 3, 7\delta_w) \times (20\delta_w; 40\delta_w))$.</i>	82
4.7	<i>Iso-vorticité des simulations pour un nombre de Reynolds égal à 800. Les visualisations ont été effectuée pour $\bar{t} = 14$ avec $\bar{t} = 2t \frac{U_1 - U_2}{\delta_w}$.</i>	85
4.8	<i>Vue schématique du domaine de calcul</i>	87
4.9	<i>Profil vertical de la vitesse longitudinale u au centre du cylindre ($x_{cyl} = 5D, y$). — : SEMC, — — — : AEMC.</i>	88
4.10	<i>Isocontours du champ de pression autour du cylindre de la simulation AEMC (gauche) et de la simulation AEMD (droite).</i>	88
4.11	<i>Champ de vorticité de la simulation AEMC (droite) et de la simulation SEMC (gauche).</i>	89
4.12	<i>Vue schématique du domaine de calcul</i>	90
4.13	<i>Iso-surfaces de la norme de vorticité $\omega_n = 1, 5D/U$. Vue de perspective pour la simulations SND III.</i>	91

4.14	<i>Iso-surfaces de la norme de vorticité $\omega_n = 1,5D/U$. Vue dans le plan $x-y$. Les visualisations de la colonne de gauche sont les simulations réalisées avec les sch�emas d'ordre 6 et celles de droite sont réalisées avec les sch�emas d'ordre 2.</i>	92
4.15	<i>A gauche : Profil vertical de la composante longitudinale de la vitesse moyenne. A droite : Profil vertical des fluctuations de la composante longitudinale de la vitesse. A diff�erentes localisations $(x-x_{cyl})/D = 1, 2; 1, 5; 2, 0; 2, 5; 3, 0$ du haut vers le bas. Symboles : $-$: SND I, $- \cdot -$: SND II, $\diamond$ Simulation spectrale de Mittal et Balachandar [74]</i>	94
4.16	<i>A gauche : Profil vertical de la composante longitudinale de la vitesse moyenne. A droite : Profil vertical des fluctuations de la composante longitudinale de la vitesse. A diff�erentes localisations $(x-x_{cyl})/D = 1, 2; 1, 5; 2, 0; 2, 5; 3, 0$ du haut vers le bas. Symboles : $-$: SND III, $- \cdot -$: SND IV, $\diamond$ Simulation spectrale de Mittal et Balachandar [74]</i>	94
4.17	<i>A gauche : Profil vertical de la composante longitudinale de la vitesse moyenne. A droite : Profil vertical des fluctuations de la composante longitudinale de la vitesse. A diff�erentes localisations $(x-x_{cyl})/D = 1, 2; 1, 5; 2, 0; 2, 5; 3, 0$ du haut vers le bas. Symboles : $-$: SND V, $- \cdot -$: SND VI, $\diamond$ Simulation spectrale de Mittal et Balachandar [74]</i>	95
5.1	<i>Visualisation de la g�eom�trie des deux bords de fuite.</i>	98
5.2	<i>Visualisation de structures coh�erentes en couche de mélange. (D'après Brown et Roshko [15])</i>	99
5.3	<i>Couche de mélange plane (D'après Bernal et Roshko [6]).</i>	102
5.4	<i>Schéma repr�esentant l'organisation principale dans un écoulement de couche de mélange plane (D'après Bernal et Roshko [6]).</i>	103
5.5	<i>Visualisation des interactions entre les tourbillons dans une couche de mélange plane (D'après Hussain [42]) avec une vue schématique du phénomène d'appariements.</i>	103
5.6	<i>Schéma repr�esentant le développement des instabilités tridimensionnelles dans un écoulement de couche de mélange (D'après Lasheras et Choi [59]).</i>	104
5.7	<i>Stabilité de l'état initial en fonction du nombre de Reynolds (d'après Manneville [71]).</i>	106
5.8	<i>Schématisation de la réponse d'un écoulement à une perturbation localisée dans le temps et dans l'espace. En haut à gauche, cas d'une instabilité absolue. En haut à droite, cas d'une instabilité convective. En bas, la perturbation s'efface et l'écoulement est stable (d'après Manneville [71]).</i>	107
5.9	<i>Gauche : frontière entre instabilité convective et absolue en écoulement de couche de mélange avec effet de sillage (D'après Wallace et Redekopp [100]).</i>	109
6.1	<i>Configuration de l'écoulement.</i>	113
6.2	<i>Visualisation du profil de la vitesse longitudinale au niveau du bord de fuite du coté haute vitesse (d'après Perret [81]).</i>	116

6.3	<i>Evolution de la couche limite du coté haute vitesse dans nos simulations et chez Perret [81].</i>	117
6.4	<i>Simulation numérique directe réalisée par Hammond et Redekopp [38] pour un nombre de Reynolds $Re_s = 320$. Iso-contours de vorticité (— : vorticité positive, ... : vorticité négative) pour un paramètre de vitesse $r = 1$ (en haut), $r = 0,83$ (au milieu) et $r = 0,67$ (en bas).</i>	119
6.5	<i>Iso-contours de vorticité (— : vorticité positive, ... : vorticité négative) pour un paramètre de vitesse $r = 0$ (en haut), $r = 0,1$ (au milieu) et $r = 0,2$ (en bas).</i>	120
6.6	<i>Iso-contours de vorticité (— : vorticité positive, ... : vorticité négative) : a) $CMEp_{ref}$, b) $CMEp\ 1$, c) $CMEp\ 2$ et d) $CMEp\ 3$.</i>	122
6.7	<i>Configuration de l'écoulement et notations</i>	123
6.8	<i>Vue schématique du domaine de calcul et des conditions aux limites. . . .</i>	124
6.9	<i>Iso-surface de la norme de vorticité $\omega_n = 0.75\Delta U/h$ pour la simulation de couche de mélange épaisse.</i>	126
6.10	<i>En haut : Visualisation instantanées de l'écoulement de [81]. En bas : Iso-surface de vorticité de la simulation considérée $\omega_n = 0.75\Delta U/h$.</i>	127
6.11	<i>Distribution de la vitesse moyenne adimensionnée : a) et b) résultats de notre simulation, c) et d) résultats de Perret [81].</i>	128
6.12	<i>Comparaison des profils de la vitesse moyenne longitudinale adimensionnée � différentes positions pour notre simulation (traits pleins) et pour les investigations expérimentales de Perret [81] (traits pointillés).</i>	129
6.13	<i>Evolution longitudinale de l'épaisseur de vorticité.</i>	130
6.14	<i>Evolution longitudinale du déficit de vitesse $f = (U_m - U_{min})/U_m$ (paramètre de vitesse $\lambda = 0,20$)</i>	131
6.15	<i>Evolution longitudinale des tensions de Reynolds.</i>	132
6.16	<i>Evolution longitudinale des maxima des tensions de Reynolds.</i>	133
7.1	<i>Configuration de l'écoulement.</i>	136
7.2	<i>Iso-contours de vorticité : a) $CMCa\ 1$, b) $CMCa\ 2$, c) $CMCa\ 3$ et d) $CMCa\ 4$.</i>	138
7.3	<i>Iso-contours de vorticité (— : vorticité positive, ... : vorticité négative) : a) $CMCp_{ref}$, b) $CMCp\ 1$, c) $CMCp\ 2$ et d) $CMCp\ 3$.</i>	139
7.4	<i>Iso-contours de vorticité (— : vorticité positive, ... : vorticité négative) : a) $CMCr_{ref}$, b) $CMCr\ 1$, c) $CMCr\ 2$, d) $CMCr\ 3$, e) $CMCr\ 4$ et f) $CMCr\ 5$.</i>	141
7.5	<i>Configuration de l'écoulement et notations</i>	142
7.6	<i>Iso-surface de la norme de vorticité $\omega_n = 0.75\Delta U/h$ pour la simulation de couche de mélange classique.</i>	143
7.7	<i>Superposition de trois profils moyens de vitesse longitudinale pour $31,5h \leq x \leq 42h$.</i>	144
7.8	<i>Distribution de la vitesse moyenne adimensionnée : a) et b) résultats de notre simulation, c) et d) résultats de Perret [81].</i>	145

7.9	<i>Evolution longitudinale du déficit de vitesse $f = (U_m - U_{min})/U_m$ (paramètre de vitesse $\lambda = 0,20$) (L_g est égal à L pour la CMC et à l pour la CME).</i>	145
7.10	<i>Evolution longitudinale de l'épaisseur de vorticité.</i>	146
7.11	<i>Evolution longitudinale des tensions de Reynolds.</i>	147
7.12	<i>Evolution longitudinale des maxima des tensions de Reynolds.</i>	148
7.13	<i>Iso-surface de la norme de vorticité $\omega_n = 0,75\Delta U/h$. Couche de mélange épaisse (haut) et couche de m�lanche classique (bas)</i>	149
7.14	<i>Evolution longitudinale de l'épaisseur de vorticité.</i>	150
C.1	<i>Champ de vorticité d'une couche de mélange sur un maillage homogène pour $n_y = 501$ à différents instants : a) $\bar{t} = 10$, b) $\bar{t} = 17$, c) $\bar{t} = 26$, d) $\bar{t} = 33$, e) $\bar{t} = 62$, f) $\bar{t} = 70$, g) $\bar{t} = 80$ et h) $\bar{t} = 88$ avec $\bar{t} = 2t \frac{U_1 - U_2}{\delta_w}$.</i>	174
C.2	<i>Champ de vorticité d'une couche de mélange sur un maillage inhomogène pour $n_y = 129$ et $\beta = 5$ à différents instants : a) $\bar{t} = 10$, b) $\bar{t} = 17$, c) $\bar{t} = 26$, d) $\bar{t} = 33$, e) $\bar{t} = 62$, f) $\bar{t} = 70$, g) $\bar{t} = 80$ et h) $\bar{t} = 88$ avec $\bar{t} = 2t \frac{U_1 - U_2}{\delta_w}$.</i>	175
C.3	<i>Champ de vorticité d'une couche de mélange sur un maillage inhomogène pour $n_y = 65$ et $\beta = 2.35$ à différents instants : a) $\bar{t} = 10$, b) $\bar{t} = 17$, c) $\bar{t} = 26$, d) $\bar{t} = 33$, e) $\bar{t} = 62$, f) $\bar{t} = 70$, g) $\bar{t} = 80$ et h) $\bar{t} = 88$ avec $\bar{t} = 2t \frac{U_1 - U_2}{\delta_w}$.</i>	176
C.4	<i>Champ de vorticité d'une couche de mélange sur un maillage inhomogène pour $n_y = 65$ et $\beta = 1.2$ à différents instants : a) $\bar{t} = 10$, b) $\bar{t} = 17$, c) $\bar{t} = 26$, d) $\bar{t} = 33$, e) $\bar{t} = 62$, f) $\bar{t} = 70$, g) $\bar{t} = 80$ et h) $\bar{t} = 88$ avec $\bar{t} = 2t \frac{U_1 - U_2}{\delta_w}$.</i>	177

Notations

Paramètres généraux

x	direction longitudinale
y	direction verticale
z	direction transversale
u	Composante de la vitesse dans la direction x
v	Composante de la vitesse dans la direction y
w	Composante de la vitesse dans la direction z
u'	Composante de vitesse fluctuante dans la direction x
v'	Composante de vitesse fluctuante dans la direction y
w'	Composante de vitesse fluctuante dans la direction z
$\langle u \rangle$	Composante de vitesse moyenne dans la direction x
$\langle v \rangle$	Composante de vitesse moyenne dans la direction y
$\langle w \rangle$	Composante de vitesse moyenne dans la direction z
L_x	Taille du domaine dans la direction x
L_y	Taille du domaine dans la direction y
L_z	Taille du domaine dans la direction z
n_x	Nombre de points dans la direction x
n_y	Nombre de points dans la direction y
n_z	Nombre de points dans la direction z
Δx	Pas d'espace dans la direction x
Δy	Pas d'espace dans la direction y
Δz	Pas d'espace dans la direction z
Δt	Pas de temps
k_x	Nombre d'onde dans la direction x
k_y	Nombre d'onde dans la direction y
k_z	Nombre d'onde dans la direction z
k'_x	Nombre d'onde modifié dans la direction x
k'_y	Nombre d'onde modifié dans la direction y
k'_z	Nombre d'onde modifié dans la direction z
T_x	Fonction de transfert dans la direction x
T_y	Fonction de transfert dans la direction y
T_z	Fonction de transfert dans la direction z

Opérateurs

$\overline{(\cdot)}$	Quantité filtrée
$\widehat{(\cdot)}$	Quantité exprimée dans l'espace de Fourier
$(\cdot)'$	Quantité fluctuante
$\langle \cdot \rangle$	Quantité moyennée en temps et en espace

Paramètres relatifs aux écoulements étudiés

U_1	Haute vitesse de l'écoulement
U_2	Basse vitesse de l'écoulement
U_c	Vitesse de convection
ΔU	Différence de vitesse
Re_{cm}	Nombre de Reynolds de couche de mélange
Re_s	Nombre de Reynolds de sillage
St	Nombre de Strouhal
δ_ω	Epaisseur de vorticité de la couche de mélange
δ_1	Epaisseur de déplacement de la couche limite coté haute vitesse
δ_2	Epaisseur de déplacement de la couche limite coté basse vitesse
$\delta_{\theta 1}$	Epaisseur de quantité de mouvement de la couche limite coté haute vitesse
$\delta_{\theta 2}$	Epaisseur de quantité de mouvement de la couche limite coté basse vitesse
δ_{100}	Epaisseur totale (100%) de la couche limite coté haute vitesse
δ_{200}	Epaisseur totale (100%) de la couche limite coté basse vitesse
λ	Paramètre de vitesse
r	Rapport de vitesse
H	Rapport de forme
ω	Champ de vorticité

Abbr vations

CAL	Conditions aux limites
CEAT	Centres d�tudes Aérodynamiques et Thermiques
CFL	Nombre de Courant-Friedrich-Levy
CMC	Couche de mélange classique à bord de fuite biseauté
CME	Couche de mélange épaisse à bord de fuite épais
DNS	Direct Numerical Simulation
FFT	Fast Fourier Transform
JMFFT	Bibliothèque de transformées de Fourier Rapides de l'IDRIS
LEA	Laboratoire d'Etude Aérodynamique
LES	Large Eddy Simulation
POD	Proper Orthogonal Decomposition
RANS	Reynolds Average Navier-Stokes Equation
SGE	Simulation aux Grandes Echelles
SND	Simulation Numérique Directe
TFR	Transformée de Fourier Rapide

Chapitre 1

Introduction

L'étude de la turbulence a subi bien des évolutions au cours de ces dernières années. Avant, seules deux approches étaient envisagées pour l'étude de la turbulence. Soit on choisissait de l'analyser d'un point de vue théorique en faisant un certains nombres d'hypothèses simplificatrices, soit on cherchait à la reproduire, sous forme d'expériences, afin de mettre en évidence des événements, des phénomènes physiques.

Avec le développement de l'informatique et plus particulièrement l'augmentation de la puissance des ordinateurs, les méthodes de simulation numérique en mécanique des fluides sont devenues une véritable alternative à ces deux approches. Grâce à la puissance croissante des supercalculateurs, il est possible de faire des simulations pour des maillages de plus en plus fins, et donc de résoudre les équations du mouvement d'un fluide sur une gamme d'échelles de plus en plus large. Il existe plusieurs types d'approches numériques pour le calcul des écoulements. Les méthodes les plus répandues sont

- la simulation considérant les équations de Navier-Stokes moyennées (méthode RANS pour *Reynolds-Averaged Navier-Stokes*) ;
- la simulation des grandes échelles (*SGE*) ;
- la simulation numérique directe (*SND*).

La première approche a longtemps été considérée comme étant la seule méthode permettant de résoudre numériquement les problèmes d'intérêt industriel. Cependant, les possibilités de la *SGE* et de la *SND* augmentent d'année en année grâce à l'évolution croissante des performances des calculateurs, même si ces dernières ne permettent pas encore de se placer en situation concurrentielle pour l'étude d'applications «grandeurs natures». Pour le moment, même si la *SND* apparaît comme l'approche numérique de la turbulence la plus fidèle en évitant toute modélisation complémentaire aux équations de Navier-Stokes, seule la *SGE* est parfois capable de remplacer les méthodes *RANS* pour des calculs à vocation industrielle.

La *SND* consiste à résoudre les équations tridimensionnelles instationnaires de Navier-Stokes sans faire aucune modélisation ou approximation de la turbulence. Du fait de son exigence en espace mémoire et en temps de calcul, elle appartient encore au domaine de la recherche. Toutes les échelles de la turbulence rencontrées dans l'écoulement, de la plus grande (imposée par la configuration) à la plus petite (l'échelle de Kolmogorov) sont prises

en compte, ce qui lui confère des qualités de reproduction de la turbulence très élevées. Cette méthode présente l'avantage de donner accès à toutes les quantités instantanées de l'écoulement (champs de vitesse et de pression) dans tout le domaine spatial calculé. C'est pourquoi on peut dire à son propos qu'elle permet d'effectuer de véritables «expériences numériques». La *SND* s'avère donc très utile pour le chercheur à des seules fins de prédiction d'écoulements en configuration réelle ou bien pour l'exploration numérique des écoulements académiques, la caractérisation des mouvements tourbillonnaires générés dans diverses géométries d'écoulement restant encore un vaste chantier. En effet, dans certains cas, les phénomènes intéressants ne sont pas forcément liés à la valeur du nombre de Reynolds, mais plutôt à la configuration de l'écoulement et aux conditions initiales.

La SGE est une alternative intéressante pour des études à plus grand nombre de Reynolds. Le principe de cette méthode est de ne calculer que les échelles pouvant être résolues sur un maillage donné. Pour qu'un tel calcul soit correct, comme l'action des échelles sous-maille (c'est à dire ne pouvant être prise en compte par le maillage) ne peut être ignorée, une modélisation de ces échelles est nécessaire. Le réalisme des simulations est conditionné par la qualité du modèle utilisé. Il est possible d'obtenir des résultats présentant des caractéristiques communes avec ceux ici d'une *SND* puisque la SGE permet la connaissance de l'instationnarité et de la structure tridimensionnelle de l'écoulement.

Il existe au Laboratoire d'Etudes Aérodynamiques (LEA) un code de calcul dédié à ces deux approches dans un contexte de simulation d'un fluide incompressible. Actuellement, plusieurs alternatives s'offrent au chercheur pour l'étude des écoulements avec ces deux approches. S'il recherche la précision et la vitesse de calcul alors il pourra se tourner vers les méthodes spectrales. Ces méthodes, qui opèrent sur des équations obtenues après transformation dans l'espace spectral se limitent cependant à des écoulements académiques mais elles constituent un outil privilégié d'investigation de la turbulence.

S'il cherche à étudier des écoulements en géométrie complexe en faisant quelques concessions sur la précision des résultats et le coût de calcul, alors il pourra se tourner vers des méthodes avec un maillage non-structuré qui épouse parfaitement les contours de la géométrie dans l'écoulement considéré. Ces méthodes qui combinent éléments finis et/ou volumes finis sont très répandues dans le milieu industriel et sont beaucoup utilisées dans les codes commerciaux. Cependant, il y a trois inconvénients majeurs à leur utilisation : le temps de calcul pour générer le maillage, la complexité du code à développer, et enfin les distorsions du maillage qui peuvent avoir un effet désastreux sur la précision du calcul.

Toutes ces méthodes sont utilisées actuellement, ce qui montre à l'évidence qu'aucune d'elles n'est parfaite. Tout dépend des exigences du chercheur. Le code de calcul aux différences finies développé au sein du laboratoire se place dans une démarche intermédiaire entre les deux approches précédemment décrites. C'est ce qui fait son originalité. Le pari d'**Incompact3d** porte sur la haute précision des schémas numériques combinée à l'usage d'un maillage simplifié cartésien. L'usage d'un tel maillage n'est pas incompatible avec l'étude d'écoulements à géométrie complexe grâce aux méthodes de modélisation de parois par forçage. L'idée est de pouvoir rivaliser en termes de précision avec les méthodes spectrales mais aussi de pouvoir étudier des configurations d'écoulement avec des géométries complexes en recherchant avant tout la simplicité dans la mise en œuvre pour un coût de

calcul le plus faible possible.

L’objectif de cette thèse est de contribuer à l’amélioration de ce code tout en prenant en compte les attentes des équipes de recherche du laboratoire notamment dans le domaine de la turbulence et de l’aéroacoustique avec pour impératif de conserver sa rapidité, son homogénéité et sa simplicité d’utilisation.

Depuis de nombreuses années, l’écoulement de couche de mélange a fait l’objet de nombreuses études expérimentales au LEA [30, 12, 11] plus particulièrement dans le domaine de la détection des structures tourbillonnaires. Plus récemment, Perret [81] a réalisé des essais en soufflerie avec deux types de géométries pour la plaque séparatrices (bord de fuite de type culot et bord de fuite biseauté). Nous avons choisi d’étudier les deux écoulements associés à ces deux géométries de plaque séparatrice.

Ce mémoire est constitué, outre ce chapitre introductif et la conclusion, de 6 chapitres principaux. Il est organisé de la manière suivante

- Le chapitre 2 présente le code de calcul tel qu’il existait au début de cette thèse. Nous effectuons une description des méthodes numériques avec l’emploi de schémas de haute précision. On y présente plus particulièrement la méthode originale de résolution de l’équation de Poisson dans l’espace spectral. Nous abordons aussi dans cette partie une méthode de modélisation d’obstacle dans un écoulement par forçage direct.
- Les développements numériques effectués durant cette thèse sont présentés dans le chapitre 3. En fonction des attentes des équipes de recherche du laboratoire, nous avons entrepris une refonte complète du code avec comme idée directrice de conserver la rapidité, la simplicité du code, de le rendre plus accessible pour les chercheurs et surtout d’accroître sa polyvalence et son champ d’application.
- Le chapitre 4 est consacré à tous nos calculs de validations. En effet, nous avons réalisé pendant cette thèse un nombre important de modifications du code **Incompact3d**. Il a donc fallu à chaque fois, valider ces développements en considérant des écoulements dont la solution analytique est connue ou d’autres déjà étudiés avec une ancienne version du code de manière à rendre possible les comparaisons.
- Dans le chapitre 5, nous présentons l’écoulement cisailé libre étudié, à savoir la couche de mélange en aval d’un bord de fuite à géométrie variable. Nous précisons ici les mécanismes physiques mis en jeu pour les deux configurations étudiées. De plus, quelques notions de stabilité linéaire sont utilisées ici dans le but de mettre en évidence l’influence de certains paramètres sur l’écoulement, plus particulièrement l’influence d’une composante sillage dans l’écoulement.
- Dans le chapitre 6, nous présentons les résultats des simulations réalisées en aval d’une plaque séparatrice avec un bord de fuite épais (couche de mélange épaisse). La première partie du chapitre est consacrée à la mise en œuvre d’une simulation tridimensionnelle. Plusieurs simulations sont réalisées afin de déterminer notamment la longueur de la plaque séparatrice, l’influence du rapport de vitesse et d’une perturbation dans la condition d’entrée. La deuxième partie du chapitre est consacrée à l’analyse des résultats d’une simulation tridimensionnelle d’une couche de mélange épaisse (CME) en effectuant un certain nombre de comparaisons avec une étude

expérimentale menée par Perret [81].

- Le chapitre 7 présente les résultats des simulations réalisées en aval d'une plaque séparatrice avec un bord de fuite biseauté (couche de mélange classique). Comme dans le chapitre précédent, la première partie du chapitre est consacrée à la mise en œuvre de la simulation tridimensionnelle avec le choix de l'angle pour le profil biseauté, l'influence du rapport de vitesse et d'une perturbation dans la condition d'entrée. La deuxième partie du chapitre est consacrée à l'analyse des résultats de la simulation tridimensionnelle. Nous concluons ce chapitre par des comparaisons avec l'écoulement de couche de mélange épaisse dans le but de montrer l'influence de la géométrie de la plaque séparatrice.

Chapitre 2

Méthodes numériques

Le code de calcul **Incompact3d** est basé sur des schémas numériques de haute précision sur un maillage cartésien, l'objectif étant d'assurer une description très précise de la dynamique tourbillonnaire sur l'ensemble des échelles impliquées dans les processus. C'est un code permettant la résolution des équations de Navier-Stokes dans le cas d'un fluide de masse volumique constante. Plusieurs types d'approches numériques sont possibles pour le calcul des écoulements : *SND* ou *SGE*. **Incompact3d** a été validé ces dernières années pour différents types d'écoulements : jet rond [54], jets contrôlés [56], couche de mélange avec contrôle [57, 55], jets tournants [43], écoulements autour d'un cylindre [80, 95].

Dans ce chapitre, nous allons présenter les méthodes numériques utilisées dans le code de calcul. Dans un premier temps, nous allons décrire tous les opérateurs utilisés pour la résolution des équations. Dans un second temps, nous détaillerons le traitement particulier de l'équation de Poisson. En effet, cette équation est résolue partiellement ou totalement dans l'espace spectral, en fonction des conditions aux limites. Nous expliciterons aussi la méthode de forçage utilisée dans le code pour modéliser les écoulements avec obstacle.

2.1 Les équations du mouvement

Incompact3d permet de prédire le mouvement d'un fluide Newtonien, de masse volumique constante dans un repère $(0, x, y, z)$ gouverné par les équations de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p - \frac{1}{2}[\nabla(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u})] + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.2)$$

où $\mathbf{u}$ est le vecteur vitesse, p la pression (ρ est la densité constante) et ν la viscosité cinématique du fluide. Le terme $\mathbf{f}$ n'apparaît que dans le cas où l'on souhaite utiliser une méthode de forçage. L'expression du champ de force $\mathbf{f}$ sera donnée par la suite. **Incompact3d** permet l'utilisation de plusieurs types de conditions aux limites : des conditions périodiques, de type glissement libre et de type Dirichlet. Nous détaillerons par la suite les modalités d'utilisation de ces conditions aux limites dans le code et les limitations liées par exemple au traitement particulier de l'équation de Poisson.

2.2 Les conditions aux limites

La définition de conditions aux limites réalistes en mécanique des fluides est un des grands problèmes en simulation numérique pour assurer une bonne reproduction de la dynamique de l'écoulement. Il est possible avec **Incompact3d** d'utiliser plusieurs types de conditions aux limites, suivant la direction considérée et la nature de l'écoulement. Des simulations spatiales peuvent être envisagées avec des conditions de type Dirichlet pour la vitesse longitudinale. A chaque instant d'une telle simulation, on observe des structures d'autant plus anciennes et développées que l'on regarde vers l'aval. Il est aussi possible d'envisager des simulations temporelles avec des conditions aux limites périodiques dans la direction longitudinale. Ces simulations peuvent être vues comme une approximation d'une simulation spatiale dans un repère en translation uniforme à la vitesse moyenne de convection des structures. Les simulations temporelles sont très utilisées en *SND* car elles permettent d'obtenir une turbulence développée pour un coût de calcul relativement réduit.

2.2.1 Conditions aux limites dans la direction longitudinale

L'utilisation de conditions d'entrée et de sortie inadaptées peut entraîner une mauvaise représentation de la dynamique de l'écoulement ou un coût de calcul supplémentaire important, lié à l'apparition dans le domaine de calcul d'une région "irréaliste" indispensable cependant pour le développement de la turbulence. Le bon accord entre les résultats d'une simulation et les résultats expérimentaux dépend de la définition correcte de ces conditions aux limites. Ceci est particulièrement plus important dans le cas des simulations spatiales puisque l'écoulement est convecté dans tout le domaine de calcul. Dans ce type de calcul, la section d'entrée est particulièrement importante puisque c'est par celle-ci que sont injectées dans le calcul les instabilités et les structures tourbillonnaires.

C'est une thématique qui est étudiée depuis de nombreuses années au laboratoire et qui a fait l'objet de nombreux travaux [81, 30, 32, 31]. Par exemple, il est fréquent en *DNS* d'injecter dans le calcul un profil moyen déduit d'expérience et lui superposer une perturbation de faible amplitude. Il est aussi possible avec **Incompact3d** d'utiliser en condition d'entrée un calcul préliminaire dont une section correspond au plan d'entrée du calcul. Ce plan de sauvegarde doit être pris suffisamment loin des limites du domaine afin que les conditions aux limites du calcul préliminaire n'aient aucune influence sur le champ de vitesse du plan.

Simulation temporelle

Dans ce genre de simulations, des conditions périodiques sont imposées dans la direction longitudinale de l'écoulement. Les conditions initiales utilisées prescrivent la nature des instabilités et influent donc directement sur la dynamique de l'écoulement.

Pour réaliser ces simulations dans le code, on superpose le champ de perturbation (u'_x, u'_y, u'_z) au profil moyen de l'écoulement que l'on souhaite étudier à l'instant $t = 0$. La

forme de cette perturbation dépend des trois directions de l'espace. Elle est donnée par

$$\begin{aligned}
u'_x(x, y, z) &= \sum_{i=\frac{-n_x}{2}}^{\frac{n_x}{2}-1} \sum_{j=\frac{-n_y}{2}}^{\frac{n_y}{2}-1} \sum_{k=\frac{-n_z}{2}}^{\frac{n_z}{2}-1} K^2 e^{-K^2} \phi_{x_1}(k_x, k_y, k_z) e^{i2\pi\phi_{x_2}(k_x, k_y, k_z)} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}, \\
u'_y(x, y, z) &= \sum_{i=\frac{-n_x}{2}}^{\frac{n_x}{2}-1} \sum_{j=\frac{-n_y}{2}}^{\frac{n_y}{2}-1} \sum_{k=\frac{-n_z}{2}}^{\frac{n_z}{2}-1} K^2 e^{-K^2} \phi_{y_1}(k_x, k_y, k_z) e^{i2\pi\phi_{y_2}(k_x, k_y, k_z)} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}, \\
u'_z(x, y, z) &= \sum_{i=\frac{-n_x}{2}}^{\frac{n_x}{2}-1} \sum_{j=\frac{-n_y}{2}}^{\frac{n_y}{2}-1} \sum_{k=\frac{-n_z}{2}}^{\frac{n_z}{2}-1} K^2 e^{-K^2} \phi_{z_1}(k_x, k_y, k_z) e^{i2\pi\phi_{z_2}(k_x, k_y, k_z)} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}.
\end{aligned}$$

Avec k_x , k_y et k_z les nombres d'ondes dans les directions x , y et z donnés par :

$$k_x = \frac{2\pi}{L_x} i, \quad (2.3)$$

$$k_y = \frac{2\pi}{L_y} j, \quad (2.4)$$

$$k_z = \frac{2\pi}{L_z} k. \quad (2.5)$$

K donne la forme du spectre d'énergie de la perturbation. Il est défini par :

$$K^2 = \frac{k_x^2}{k_{ox}^2} + \frac{k_y^2}{k_{oy}^2} + \frac{k_z^2}{k_{oz}^2}. \quad (2.6)$$

Les nombres d'ondes k_{ox} , k_{oy} et k_{oz} correspondent aux pics d'excitation dans chacune des directions. Leurs valeurs sont déduites d'études de stabilité linéaire ou de mesures expérimentales. $\phi_{x_2}(k_x, k_y, k_z), \dots, \phi_{z_2}(k_x, k_y, k_z)$ sont des nombres aléatoires compris entre 0 et 1, et spécifiant la phase et l'amplitude de chacun des modes (k_x, k_y, k_z) . Cette méthode permet de conserver le contrôle de l'enveloppe spectrale du champ de perturbation.

Simulation spatiale

Pour ce genre de simulations, on prescrit des conditions aux limites de type Dirichlet sur la vitesse dans la direction longitudinale. Comme l'écoulement est dépendant de l'état de l'écoulement amont, il est indispensable de pouvoir imposer des conditions aux limites réalistes afin d'obtenir un écoulement réaliste.

Pour réaliser ces simulations dans le code, le champ de perturbation (u'_x, u'_y, u'_z) est superposé au profil de vitesse en entrée de domaine. Dans le but de conserver une corrélation temporelle du bruit, la perturbation est calculée en considérant les trois directions

y , z et t . Soit (u'_x, u'_y, u'_z) ce champ de perturbation défini tel que :

$$\begin{aligned} u'_x(y, z, t) &= \sum_{j=-\frac{n_y}{2}}^{\frac{n_y}{2}-1} \sum_{k=-\frac{n_z}{2}}^{\frac{n_z}{2}-1} \sum_{l=-\frac{n_t}{2}}^{\frac{n_t}{2}-1} K^2 e^{-K^2} \phi_{x1}(k_y, k_z, k_t) e^{i2\pi\phi_{x2}(k_y, k_z, k_t)} e^{i(k_y y + k_z z + k_t t)}, \\ u'_y(y, z, t) &= \sum_{j=-\frac{n_y}{2}}^{\frac{n_y}{2}-1} \sum_{k=-\frac{n_z}{2}}^{\frac{n_z}{2}-1} \sum_{l=-\frac{n_t}{2}}^{\frac{n_t}{2}-1} K^2 e^{-K^2} \phi_{y1}(k_y, k_z, k_t) e^{i2\pi\phi_{y2}(k_y, k_z, k_t)} e^{i(k_y y + k_z z + k_t t)}, \\ u'_z(y, z, t) &= \sum_{j=-\frac{n_y}{2}}^{\frac{n_y}{2}-1} \sum_{k=-\frac{n_z}{2}}^{\frac{n_z}{2}-1} \sum_{l=-\frac{n_t}{2}}^{\frac{n_t}{2}-1} K^2 e^{-K^2} \phi_{z1}(k_y, k_z, k_t) e^{i2\pi\phi_{z2}(k_y, k_z, k_t)} e^{i(k_y y + k_z z + k_t t)}. \end{aligned}$$

Avec k_y , k_z et k_t les nombres d'ondes dans les directions y , z et t donnés par :

$$k_y = \frac{2\pi}{L_y} j, \quad (2.7)$$

$$k_z = \frac{2\pi}{L_z} k, \quad (2.8)$$

$$k_t = \frac{2\pi}{\tau} l. \quad (2.9)$$

τ correspond au temps de la simulation. K donne la forme du spectre d'énergie de la perturbation. Il est défini par :

$$K^2 = \frac{k_y^2}{k_{oy}^2} + \frac{k_z^2}{k_{oz}^2} + \frac{k_t^2}{k_{ot}^2}. \quad (2.10)$$

k_{ot} correspond à la fréquence d'excitation de l'écoulement, fréquence déduite, en général, d'études de stabilité linéaire ou de mesures expérimentales. $\phi_{x2}(k_y, k_z, k_t), \dots, \phi_{z2}(k_y, k_z, k_t)$ sont des nombres aléatoires compris entre 0 et 1, et spécifiant la phase et l'amplitude de chacun des modes (k_y, k_z, k_t) . Cette méthode permet d'obtenir un champ de perturbations homogène dans toute la section d'entrée. Il est possible ensuite de moduler ce champ en fonction des caractéristiques de l'écoulement. Par exemple, pour un écoulement de couche de mélange, on module la perturbation par une gaussienne, de manière à annuler progressivement la perturbation dans la zone irrotationnelle de l'écoulement.

La condition de sortie, utilisée lors des simulations spatiales, est une équation de convection appliquée à chaque composante de la vitesse

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + U_c \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0 \quad (2.11)$$

La vitesse de convection U_c est prise égale à la vitesse de convection moyenne de l'écoulement.

2.2.2 Conditions dans les directions transversales

Deux types de conditions aux limites pour les directions transversales de l'écoulement peuvent être utilisées dans **Incompact3d** : Soit des conditions de périodicité, soit des conditions de glissement libre.

On peut remarquer que l'emploi de ce genre de conditions aux limites empêche la prise en compte de l'entraînement à travers les frontières du domaine. Ces problèmes de confinement sont assez importants pour des simulations d'écoulements cisailés libres tels que la couche de mélange [54].

2.3 Schémas de discrétisation temporelle

Le choix d'un schéma d'avancement en temps pertinent est basé principalement sur trois critères : la précision du schéma, son coût de stockage et ses caractéristiques de stabilités. **Incompact3d** permet l'usage de plusieurs schémas d'avancement en temps. La plupart du temps, des schémas de type Runge-Kutta d'ordre 3 ou 4 (RK3 ou RK4) sont utilisés. Ces schémas de Runge-Kutta sont très répandus en simulation numérique en raison de leur grand domaine de stabilité et de leur faible coût de stockage [84, 103]. Cet avantage est primordial quand on effectue des calculs 3D à haute résolution. Il est aussi possible d'utiliser un schéma de type Adams-Bashforth d'ordre 2 (AB2).

La limite de stabilité pour ces schémas de discrétisation est donnée par la formule

$$\frac{U_{max}\Delta t}{\Delta\zeta} \leq \frac{\sigma_i}{\omega'_m} \quad (2.12)$$

où Δt est le pas d'avancement en temps, U_{max} la vitesse maximale dans l'écoulement, $\Delta\zeta$ le pas en espace le plus petit, $[-i\sigma_i, i\sigma_i]$ le segment représentant la région de stabilité sur l'axe des imaginaires pour le schéma en temps utilisé et ω'_m la valeur maximum du nombre d'onde modifié pour la dérivée première. La définition du nombre d'onde modifié sera donnée dans la partie consacrée aux schémas de discrétisation spatiale. La valeur de ω'_m pour les schémas de discrétisation spatiale utilisés dans le code (schémas Hermitiens d'ordre 6) est de 1.989. Les valeurs de σ_i pour les différents schémas temporels sont données dans le tableau (2.1).

Pour les termes visqueux, on doit respecter le critère suivant

$$\frac{\nu\Delta t}{\Delta\zeta^2} \leq \frac{\sigma_r}{\omega''_m} \quad (2.13)$$

où Δt est le pas d'avancement en temps, $\Delta\zeta$ le pas en espace le plus petit, $[\sigma_r, 0]$ le segment représentant la région de stabilité sur l'axe des réels pour le schéma en temps utilisé et ω''_m la valeur maximum du nombre d'onde modifié pour la dérivée seconde. La valeur de ω''_m pour un schéma Hermitien à l'ordre 6 est 6,857. Les valeurs de σ_r pour les différents schémas sont données dans le tableau (2.1).

Schéma	ordre	σ_i	σ_r
AB2	2	0	1
RK3	3	1,732	2,512
RK4	4	2,828	2,785

TAB. 2.1 – Valeurs de σ_i et σ_r pour les différents schémas de discrétisation temporelle du code de calcul

L'intégration en temps de l'équation (2.1) donne pour chaque sous pas de temps de t_k à t_{k+1}

$$\frac{\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k}{\Delta t} = a_k \mathbf{F}^k + b_k \mathbf{F}^{k-1} - c_k \nabla \tilde{p}^{k+1} + c_k \tilde{f}^{k+1} \quad (2.14)$$

avec

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{2} [\nabla (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] + \nu \Delta \mathbf{u} , \quad (2.15)$$

$$\tilde{p}^{k+1} = \frac{1}{c_k \Delta t} \int_{t_k}^{t_{k+1}} p \, dt \quad (2.16)$$

Remarque sur la formulation des termes non-linéaires

En simulation numérique, on distingue généralement deux types d'erreurs. Il y a les erreurs de troncatures qui peuvent être minimisées en utilisant des schémas de haute précision. Il existe aussi les erreurs d'«aliasing» (apparition d'oscillations, voir Canuto *et al.* [17] pour plus d'informations) lors de l'évaluation des termes non-linéaires sur un maillage discret qui peuvent être réduites en effectuant une troncature des modes contaminés dans l'espace de Fourier. **Incompact3d** proposent deux alternatives pour réduire ou supprimer ces erreurs d'«aliasing». Soit on utilise une formulation rotationnelle

$$H_i = u_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.17)$$

soit on utilise une formulation de type «skew-symmetric». Selon Kravchenko et Moin [48, 49], cette formulation est celle qui minimise les erreurs de calculs sur les termes non-linéaires. Cette formulation s'écrit

$$H_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (2.18)$$

Lardeau [54] a effectué des tests sur l'influence de chaque formulation pour une simulation temporelle d'un jet rond avec la même condition initiale, pour un domaine et un maillage identique. Il n'a pas constaté de différences majeures pour ces simulations mis à part

de légères différences de mouvements à petites échelles, difficilement perceptibles sur le champ de vorticité. Pour la suite de nos simulations, nous avons choisi la formulation de type «skew-symmetric».

La condition d'incompressibilité est appliquée sur le champ résultant à savoir

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{k+1} = 0 \quad (2.19)$$

Pour un schéma de type AB2, nous avons $k = 1$ avec $t_1 = t_n$ et $t_2 = t_{n+1}$, $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ étant le pas de temps total. Les coefficients a_k et b_k choisis afin d'avoir une précision d'ordre deux en temps sont égaux à

$$a_1 = \frac{3}{2} \quad b_1 = -\frac{1}{2} \quad (2.20)$$

avec, par convention $c_1 = a_1 + b_1$.

Pour un schéma de type RK3, nous avons trois sous pas de temps $k = 1, 2, 3$ avec $t_1 = t_n$ et $t_4 = t_{n+1}$. Les coefficients a_k et b_k , choisis afin d'avoir une précision d'ordre trois en temps, sont donnés par Williamson [103]

$$a_1 = \frac{8}{15} \quad b_1 = 0 \quad (2.21)$$

$$a_2 = \frac{5}{12} \quad b_2 = -\frac{17}{60} \quad (2.22)$$

$$a_3 = \frac{3}{4} \quad b_3 = -\frac{5}{12} \quad (2.23)$$

avec, par convention $c_k = a_k + b_k$.

Pour un schéma de type RK4, nous avons quatre sous pas de temps $k = 1, 2, 3, 4$ avec $t_1 = t_n$ et $t_5 = t_{n+1}$. Les coefficients a_k et b_k sont choisis afin d'avoir une précision d'ordre quatre en temps et sont égaux à

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad b_1 = \frac{1}{6} \quad (2.24)$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \quad b_2 = \frac{1}{3} \quad (2.25)$$

$$a_3 = 1 \quad b_3 = \frac{1}{3} \quad (2.26)$$

$$a_4 = \frac{1}{2} \quad b_4 = \frac{1}{6} \quad (2.27)$$

avec, par convention $c_k = a_k + b_k$.

Une méthode à pas fractionnaire est alors utilisée et l'équation (2.14) devient

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^k}{\Delta t} &= a_k \mathbf{F}^k + b_k \mathbf{F}^{k-1} \\ \frac{\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} &= -c_k \nabla \tilde{p}^{k+1} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Dans cette méthode à pas fractionnaire, $\tilde{p}^{k+1}$ est obtenue par la résolution de l'équation de Poisson

$$\nabla \cdot \nabla \tilde{p}^{k+1} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^*}{c_k \Delta t} \quad (2.29)$$

qui permet de vérifier la condition d'incompressibilité après la correction de la vitesse effectuée à l'équation (2.28).

Remarque

Il est aussi possible d'utiliser un schéma de type Runge-Kutta à l'ordre 4 amélioré (RK4 CK) mis au point par Carpenter et Kennedy [20]. Ce schéma que nous avons adapté pour le code présente de nombreux avantages

- C'est un schéma à coût de stockage réduit (deux niveaux de stockage) alors que généralement les schémas de Runge-Kutta d'ordre 4 classiques comportent trois niveaux de stockage.
- Combiné avec des schémas compacts d'ordre 6, sa limite de stabilité est de 3,34 contre 2,828 pour un schéma de type Runge-Kutta d'ordre 4 classique.
- Sa limite de stabilité au niveau des termes visqueux est de 4,65 contre 2,785 pour un schéma de type Runge-Kutta d'ordre 4 classique.

L'algorithme de ce schéma s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} u_0 &= u^n \\ Q_j &= A_j + Q_{j-1} + \Delta t F(u_{j-1}) \\ u_j &= u_{j-1} + B_j Q_j, \quad j = 1, \dots, s \quad (s = 5) \\ u^{n+1} &= u_s \end{aligned} \quad (2.30)$$

Les coefficients A_j et B_j sont donnés par Carpenter et Kennedy [20]

$$\begin{aligned} A_1 &= 0 & A_2 &= -\frac{567301805773}{1357537059087} & A_3 &= -\frac{24042667990393}{201674665238} & A_4 &= -\frac{3550918686646}{2091501179385} & A_5 &= \frac{1275806237668}{842570457699} \\ B_1 &= \frac{1432997174477}{9575080441755} & B_2 &= \frac{5161836677717}{13612068292357} & B_3 &= \frac{1720146321549}{2090206949498} & B_4 &= \frac{3134564353537}{4481467310338} & B_5 &= \frac{2277821191437}{14882151754819} \end{aligned}$$

Si on désire simuler des écoulements avec un obstacle, il est possible de combiner une méthode de modélisation par forçage avec ce code. Nous allons donc maintenant étudier cette stratégie très avantageuse dans notre cas puisqu'elle permet de conserver un maillage cartésien. Nous verrons les modifications à apporter sur les équations précédentes en raison de la prise en compte du terme $\mathbf{f}$ dans les équations de Navier-Stokes.

2.4 Méthode de modélisation par forçage

La simulation des écoulements autour d'une géométrie complexe est un grand défi en *SND/SGE*. Typiquement, il existe deux types d'approches. La première consiste à adapter

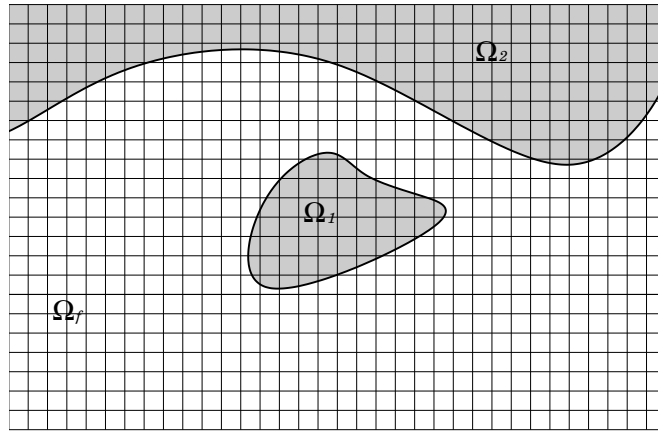


FIG. 2.1 – Vue schématique de deux types de domaines solides Ω_1 et Ω_2 au sein d'un milieu fluide Ω_f , le tout considéré dans le domaine de calcul $\Omega = \Omega_f \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$.

la géométrie du maillage à la forme de l'obstacle. L'autre méthode consiste à garder un maillage cartésien, indépendant de la géométrie, et à rajouter une force extérieure dans les équations de Navier-Stokes dans le but de modéliser l'obstacle dans l'écoulement. Ce type d'approche nous vient du domaine de la biomécanique. Dès les années 1970, Peskin [82, 83] modélise des obstacles dans les artères du cœur. La figure (2.1) illustre les deux cas de géométrie que l'on peut rencontrer. Le principe de la méthode est d'imposer des conditions aux limites sur $\partial\Omega_1$ et $\partial\Omega_2$ par l'intermédiaire d'un champ cible $\mathbf{u}_0$ nul sur les domaines Ω_1 et Ω_2 .

Il existe une approche de modélisation qui permet de conserver l'avantage de nos schémas de haute précision. La présence de parois dans le domaine de calcul Ω peut être définie à l'aide de sous domaines, par exemple Ω_1 et Ω_2 dans notre cas. Comme on peut le voir, le domaine représentant un obstacle peut être complètement immergé (Ω_1) ou il peut être partiellement immergé (Ω_2).

Il existe de nombreuses techniques et plusieurs terminologies pour cette approche : «méthode de forçage direct», «méthode de pénalisation», «méthode des frontières virtuelles», «méthode des frontières immergées»... Pour plus de détails, notamment sur les différences et les similitudes entre chaque méthode, le lecteur pourra se référer à Lamballais [51]. Plusieurs séries de tests ont été effectuées avec **Incompact3d** par Parnaudeau [79]. Le choix de la technique a été basé principalement sur deux critères : il fallait que la méthode n'ajoute pas une contrainte de stabilité supplémentaire comme c'est le cas avec la méthode des frontières virtuelles. De plus, il fallait aussi que la méthode choisie soit la plus simple possible à mettre en œuvre, notamment dans une optique d'utiliser la méthode avec un déplacement d'obstacle. La technique qui s'avère être la plus efficace selon ces critères est la méthode de forçage direct. C'est la méthode qui est la plus brutale pour imposer la condition voulue.

L'idée de la méthode est de prescrire le forçage directement sur $\mathbf{u}^{n+1}$ mais ceci n'est pas envisageable. En effet, pour imposer les conditions aux limites directement sur $\mathbf{u}^{n+1}$,

il faudrait connaître le champ de pression et $\mathbf{u}^{n+1}$ au même instant. Pour contourner cette difficulté, une méthode de projection en trois étapes est utilisée et lorsqu'on utilise un schéma de type AB2 l'équation (2.14) devient

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = \frac{3}{2}\mathbf{F}^n - \frac{1}{2}\mathbf{F}^{n-1} - \nabla \tilde{p}^n + \tilde{\mathbf{f}}^* \quad (2.31)$$

$$\frac{\mathbf{u}^{**} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = \nabla \tilde{p}^n \quad (2.32)$$

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{**}}{\Delta t} = -\nabla \tilde{p}^{n+1} \quad (2.33)$$

avec $\varepsilon = 1$ dans l'obstacle et $\varepsilon = 0$ partout ailleurs. $\mathbf{F}$ est donnée par la relation (2.15) et $\tilde{p}^{n+1}$ vaut

$$\tilde{p}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} p \, dt. \quad (2.34)$$

Comme il n'est pas possible d'injecter nos conditions aux limites sur $\mathbf{u}^{n+1}$, on impose le champ cible $\mathbf{u}_0$ sur $\mathbf{u}^*$. La force volumique prend alors la forme suivante

$$\tilde{\mathbf{f}}^* = \varepsilon \left(-\frac{3}{2}\mathbf{F}^n + \frac{1}{2}\mathbf{F}^{n-1} + \nabla \tilde{p}^n + \frac{\mathbf{u}_0^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} \right) \quad (2.35)$$

En pratique, cette petite modification nous empêche de vérifier exactement nos conditions aux limites puisque le champ cible n'est pas imposé sur $\mathbf{u}^{n+1}$. Le résidu occasionné évolue comme l'erreur de fractionnement à savoir en Δt^2 pour un schéma de type AB2.

La condition d'incompressibilité

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad (2.36)$$

est vérifiée grâce à la résolution de l'équation de Poisson

$$\nabla \cdot \nabla \tilde{p}^{n+1} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^{**}}{\Delta t} \quad (2.37)$$

ce qui nous impose de connaître $\tilde{p}^{n+1}$ pour effectuer l'étape de correction(2.33).

Cette méthode a été améliorée par Parnaudeau *et al.* [80]. En effet, ces auteurs ont observé des oscillations parasites au niveau des parois de l'obstacle engendrant des erreurs significatives (de l'ordre de 10%) dans les statistiques turbulentes obtenues dans le cas d'un écoulement derrière un cylindre. Bien que ces oscillations puissent être facilement réduites en augmentant la résolution du calcul, une méthode de forçage améliorée a été mise au point pour le code de calcul par Parnaudeau *et al.* [80].

Dans les faits, l'utilisation d'une telle méthode avec des schémas de haute précision pose problème lorsque l'on rencontre une singularité dans l'écoulement comme c'est le cas avec une paroi. En effet, le champ de vitesse passe brutalement à zéro engendrant une discontinuité sur les dérivées. L'utilisation de schémas d'ordre élevé, au comportement quasi-spectral, est donc très pénalisante dans ce cas bien précis. Une façon de résoudre

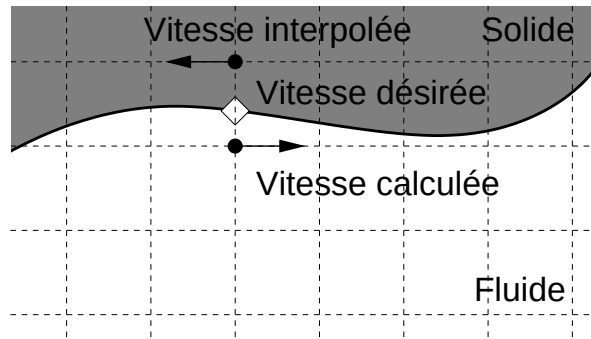


FIG. 2.2 – Méthode d'écoulement inverse pour appliquer le forçage. D'après Parnaudeau [79]

ce problème consiste à modifier la définition du champ cible $\mathbf{u}_0$ tout en veillant à ne pas nuire au respect de la condition d'adhérence à la paroi.

Le principe de la méthode est assez simple. Il est basé sur le calibrage du champ cible $\mathbf{u}_0$ sur le champ de vitesse externe à l'obstacle pour améliorer la régularité du champ de vitesse. Cette méthode consiste à inverser la vitesse en un point à l'extérieur de l'obstacle et à l'imposer au point symétrique (par rapport à la frontière de l'obstacle) à l'intérieur de l'obstacle, comme l'illustre la figure (2.2).

Cette méthode nécessite en pratique d'effectuer des interpolations multilinéaires en fonction de la géométrie de l'obstacle. Bien que l'ordre formel de ces interpolations soit de 2, nous verrons dans le chapitre sur les validations numériques que l'utilisation de schémas de haute précision reste bénéfique. De plus, afin d'assurer une meilleure régularité sur le champ cible et afin d'éviter la création d'une singularité au centre de l'obstacle, nous utilisons une fonction de modulation.

Avec cette méthode, le champ cible n'étant plus nul dans l'obstacle, il a fallu modifier la condition de divergence nulle de manière à prendre en compte le champ cible $\mathbf{u}_0$. L'équation de Poisson s'en trouve elle aussi modifiée

$$\nabla \cdot \nabla \tilde{p}^{n+1} = \frac{\nabla \cdot [(1 - \varepsilon) \mathbf{u}^{**}]}{\Delta t} \quad (2.38)$$

où l'équation de Poisson (2.37) est retrouvée pour $\varepsilon = 0$. La condition de divergence modifiée (prenant en compte l'écoulement dans l'obstacle) devient

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{u}_0^{n+1}) \quad (2.39)$$

Cette méthode a été testée en *SND* et en *SGE* par Parnaudeau [79] en simulant l'écoulement derrière un barreau. Le point fort de cette technique est sa grande simplicité de mise en œuvre qui a permis son intégration aisée dans le code de calcul. Cette méthode permet aussi de conserver tout le potentiel des schémas de haute précision. En effet, Parnaudeau *et al.* [80] ont réalisé des simulations avec des schémas d'ordre 6 et des schémas d'ordre

2. Bien que l'on génère une erreur d'ordre 2 avec la méthode de forçage direct améliorée, la physique de l'écoulement est mieux décrite avec les schémas d'ordre élevé. Une partie de ces résultats est présentée dans le chapitre sur les validations des développements numériques.

2.5 Schémas de discrétisation spatiale

Pour estimer les termes de dérivations spatiales, le code de calcul utilise des schémas compacts (schémas Hermitiens) d'ordre 6. Ces schémas ont pour caractéristique principale d'avoir un comportement quasi-spectral. Ils ont aussi comme avantage, par rapport aux schémas classiques, d'avoir un domaine de dépendance réduit pour un ordre donné. Les erreurs d'anisotropie sont également limitées par l'utilisation de ces schémas, tout comme les erreurs de troncature (de nature dispersive pour un schéma centré). Une étude complète de ces schémas a été faite par Lele [62].

2.5.1 Généralités

Soit une distribution uniforme de n_x points x_i sur un intervalle $[0, L_x]$ avec

$$x_i = (i - 1)\Delta x, \quad i = 1, \dots, n_x. \quad (2.40)$$

On suppose que l'on connaît les valeurs $f_i = f(x_i)$ prises par une fonction f aux nœuds x_i et on cherche à obtenir une approximation des valeurs $f'_i = f'(x_i)$ prises par sa dérivée. Un schéma aux différences finies pour la dérivée première désigne une relation du type

$$\sum_{j=-p}^p \alpha_j f'_{i+j} = \sum_{k=-q}^q a_k f_{i+k} + O(\Delta x^n), \quad i = 1, \dots, n_x \quad (2.41)$$

où $O(\Delta x^n)$ est l'erreur de troncature du schéma. Les coefficients α_j et a_k sont contraints de vérifier un certain nombre de relations obtenues à l'aide de développements en série de Taylor. Plus l'ordre des schémas est élevé, plus le choix des (α_j, a_k) est restreint. $O(\Delta x^n)$ est l'erreur de troncature du schéma. Dans le code de calcul, nous sommes dans le cas $p = 1$ et $q = 2$ correspondant à un schéma compact ($\alpha_j \neq 0$) ce qui donne

$$\alpha f'_{i+1} + f'_i + \alpha f'_{i-1} = a \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + b \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4\Delta x} \quad (2.42)$$

La dérivée seconde de la fonction f peut se calculer de la même manière

$$\alpha f''_{i+1} + f''_i + \alpha f''_{i-1} = a \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} + b \frac{f_{i+2} - 2f_i + f_{i-2}}{4\Delta x^2} \quad (2.43)$$

Pour des simulations spatiales avec des conditions de type Dirichlet pour la vitesse, on utilise sur les frontières du domaine des schémas décentrés d'ordre 3 tel que, pour la dérivée première,

$$f'_1 + \alpha_1 f'_2 = \frac{1}{\Delta x} (a_1 f_1 + b_1 f_2 + c_1 f_3) \quad (2.44)$$

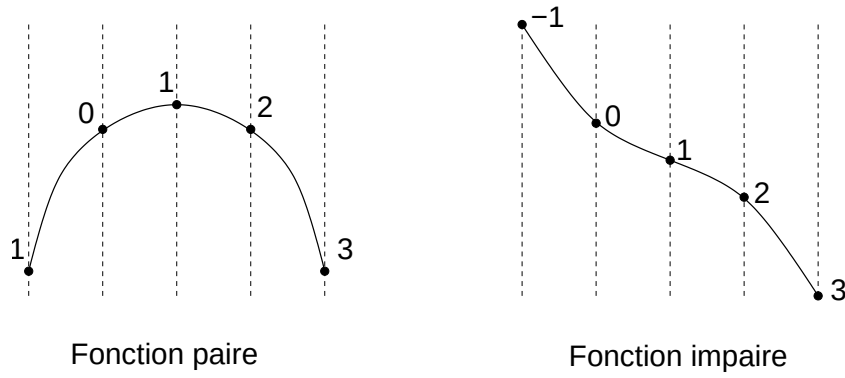


FIG. 2.3 – Illustration des deux types de conditions aux limites rencontrés dans le cas du glissement libre.

et pour la dérivée seconde

$$f_1'' + \alpha_1 f_2'' = \frac{1}{\Delta x^2} (a_1 f_1 + b_1 f_2 + c_1 f_3 + d_1 f_4) \quad (2.45)$$

Pour un schéma d'ordre deux, on va avoir $\alpha = b = 0$ et $a = 1$ ce qui donne pour la dérivée première

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} \quad (2.46)$$

2.5.2 Formulation matricielle

Il est possible d'écrire les équations (2.42) et (2.43) sous forme matricielle

$$\mathbf{A}_x \mathbf{f}' = \frac{1}{\Delta x} \mathbf{B}_x \mathbf{f} \quad (2.47)$$

$$\mathbf{A}'_x \mathbf{f}'' = \frac{1}{\Delta x^2} \mathbf{B}'_x \mathbf{f} \quad (2.48)$$

où $\mathbf{A}_x, \mathbf{A}'_x, \mathbf{B}_x, \mathbf{B}'_x$ sont des matrices carrées de taille $(n_x \times n_x)$. Les vecteurs $\mathbf{f}$, $\mathbf{f}'$ et $\mathbf{f}''$ sont de taille n_x .

Les trois types de conditions aux limites utilisés dans le code de calcul sont :

1. *Condition périodique* : On suppose $f_{n_x+1} = f_1$ et $f_0 = f_{n_x}$. $\mathbf{A}_x$ et $\mathbf{B}_x$ sont respectivement des matrices tridiagonales et pentadiagonales cycliques, et pour la dérivée première, elles s'écrivent :

$$\mathbf{A}_x = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & & & & & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & & & & & & \alpha & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_x = \begin{pmatrix} 0 & a & b & & & & -b & -a \\ -a & 0 & a & b & & & & -b \\ -b & -a & 0 & a & b & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & -b & -a & 0 & a & b \\ b & & & & -b & -a & 0 & a \\ a & b & & & & -b & -a & 0 \end{pmatrix}$$

2. *Condition de type glissement libre* : Cette condition peut être considérée comme une condition de symétrie ou d'antisymétrie suivant la composante du champ de vitesse considérée à la frontière du domaine.

On distingue deux cas de figures : soit la fonction f est paire, soit elle est impaire. Dans ces deux cas les matrices $\mathbf{A}_x$ et $\mathbf{B}_x$ sont respectivement des matrices tridiagonales et pentadiagonales. La figure 2.3 illustre les deux cas rencontrés.

Quand f est paire, les matrices $\mathbf{A}_x$ et $\mathbf{B}_x$ s'écrivent :

$$\mathbf{A}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ \alpha & 1 & \alpha & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & \alpha & 1 & \alpha \\ & & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_x = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ -a & -b & a & b & & & \\ -b & -a & 0 & a & b & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & & -b & -a & 0 & a & b \\ & & & & -b & -a & b & a \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Quand f est impaire, les matrices $\mathbf{A}_x$ et $\mathbf{B}_x$ s'écrivent :

$$\mathbf{A}_x = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & & & & & \\ \alpha & 1 & \alpha & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & \alpha & 1 & \alpha \\ & & & & & & 2\alpha & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_x = \begin{pmatrix} 0 & 2a & 2b & & & & \\ -a & b & a & b & & & \\ -b & -a & 0 & a & b & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & & -b & -a & 0 & a & b \\ & & & & -b & -a & b & a \\ & & & & & & 2b & 2a & 0 \end{pmatrix}$$

3. *Condition de type Dirichlet* : Dans ce cas, on impose les schémas décentrés (2.44) et (2.45) sur les premiers et les derniers nœuds du domaine, ainsi que des schémas centrés d'ordre 4 sur les deuxièmes et avant-derniers nœuds. Cette condition est appliquée sur la composante principale de l'écoulement, et les matrices pour la dérivée première s'écrivent alors :

$$\mathbf{A}_x = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & & & & & \\ \alpha_2 & 1 & \alpha_2 & & & & \\ & \alpha & 1 & \alpha & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & \alpha_{n_x-1} & 1 & \alpha_{n_x-1} \\ & & & & & & \alpha_{n_x} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_x = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & & & & & & \\ -a_2 & 0 & a_2 & & & & & & \\ -b & -a & 0 & a & b & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & -b & -a & 0 & a & b & \\ & & & & & -a_{n_x-1} & 0 & a_{n_x-1} \\ & & & & & c_{n_x} & b_{n_x} & a_{n_x} \end{pmatrix}$$

Les coefficients des matrices, pour les schémas décentrés d'ordre 3 en entrée et en sortie, centrés d'ordre 4 et 6 sur le reste du domaine sont fournis par Lele [62] :

– Dérivée première :

$$\alpha_1 = \alpha_{n_x} = 2, a_1 = -a_{n_x} = -\frac{5}{2}, b_1 = -b_{n_x} = 2, c_1 = -c_{n_x} = \frac{1}{2},$$

$$\alpha_2 = \alpha_{n_x-1} = \frac{1}{4}, a_2 = a_{n_x-1} = \frac{3}{4},$$

$$\alpha = \frac{1}{3}, a = \frac{7}{9}, b = \frac{1}{36}.$$

– Dérivée seconde :

$$\alpha_1 = \alpha_{n_x} = 11, a_1 = a_{n_x} = 13, b_1 = b_{n_x} = -27, c_1 = c_{n_x} = 15, d_1 = d_{n_x} = -1,$$

$$\alpha_2 = \alpha_{n_x-1} = \frac{1}{10}, a_2 = a_{n_x-1} = \frac{6}{5},$$

$$\alpha = \frac{2}{11}, a = \frac{12}{11}, b = \frac{3}{44}.$$

2.6 Résolution de l'équation de Poisson

Nous avons vu qu'il était nécessaire de résoudre l'équation de Poisson à chaque sous-pas de temps afin d'assurer la condition d'incompressibilité.

Il existe plusieurs méthodes pour résoudre cette équation. On pourrait par exemple, la résoudre avec les opérateurs aux différences finies puisque les autres parties du code les utilisent. Cependant, la résolution de l'équation de Poisson avec des schémas Hermitiens d'ordre 6 coûte très cher et est difficile à mettre en œuvre. En effet, pour un problème tridimensionnel, la taille de la matrice serait de $((N_x \times N_y \times N_z)^2)$. D'un point de vue algorithmique l'inversion d'une telle matrice est réalisable mais en pratique son coût de calcul s'avère trop pénalisant.

Afin de contourner ce problème, l'équation de Poisson dans notre code de calcul est résolue partiellement ou complètement dans l'espace spectral afin de réaliser un gain substantiel sur le temps de calcul. Il est bien sûr impératif que ce traitement soit compatible avec les conditions aux limites du problème. De plus, il est indispensable d'avoir une parfaite équivalence entre les opérateurs aux différences finies et les opérateurs spectraux pour résoudre correctement ces équations de Navier-Stokes d'où le recours au concept du nombre d'onde modifié.

En pratique, un tel solveur s'avère nettement moins onéreux que si l'on tentait de résoudre l'équation de Poisson avec les schémas Hermitiens. De plus, il permet de s'affranchir de tous les problèmes liés à la convergence de la solution en pression. Ce caractère

direct permet de vérifier l'incompressibilité (condition de divergence nulle) jusqu'au zéro machine. En contrepartie, l'utilisation de ce solveur spectral entraîne de fortes limitations plus particulièrement sur le choix des conditions aux limites notamment.

Nous allons dans un premier temps effectuer un bref rappel sur les opérateurs qui vont nous permettre de passer de l'espace physique à l'espace spectral. Nous verrons ensuite comment obtenir l'équivalence entre les opérateurs aux différences finies et les opérateurs spectraux grâce au concept du nombre d'onde modifié. Enfin, nous détaillerons le solveur de Poisson dans un contexte de simulation temporelle et dans un contexte de simulation spatiale.

2.6.1 Rappel sur les transformées de Fourier

La transformée de Fourier discrète pour une fonction périodique

Nous avons vu qu'il fallait définir un opérateur pour basculer de l'espace physique vers l'espace spectral et inversement. Pour cette opération, on utilise la transformation de Fourier discrète qui utilise des polynômes de Fourier comme fonctions de référence dans l'espace spectral.

Soit une distribution uniforme de n_x points x_i sur un intervalle $[0, L_x]$ avec

$$x_i = (i - 1)\Delta x, \quad i = 1, \dots, n_x. \quad (2.49)$$

Dans le cas d'une fonction f périodique sur le domaine $[0, L_x]$, vérifiant $f(x + L_x) = f(x)$, la transformée de Fourier discrète peut être définie par

$$\hat{f}_l = \frac{1}{n_x} \sum_{i=1}^{n_x} f_i e^{-\iota k_x x_i} \quad (2.50)$$

avec son expression inverse

$$f_i = \sum_{l=-n_x/2}^{n_x/2-1} \hat{f}_l e^{\iota k_x x_i} \quad (2.51)$$

où $\iota = \sqrt{-1}$ et $k_x = 2\pi l/L_x$

La transformée de Fourier discrète pour une fonction semi-périodique

Dans le cas d'une f vérifiant $f(x) = f(-x)$ et $f(x + L_x) = f(L_x - x)$ pour $x \in [0, L_x]$, la transformée de Fourier discrète en cosinus est définie par

$$\hat{f}_l = \frac{1}{n_x} \sum_{i=1}^{n_x} f_i \cos(k_x x_i) \quad (2.52)$$

avec son expression inverse

$$f_i = \frac{\hat{f}_0}{2} + \sum_{l=1}^{n_x-1} \hat{f}_l \cos(k_x x_i) - \frac{\hat{f}_{n_x}}{2} \quad (2.53)$$

où $k_x = \pi l / L_x$ est le nombre d'onde. A noter que l'on a pas besoin de transformées de Fourier en sinus pour la résolution de l'équation de Poisson.

Pour effectuer ces transformations numériquement, nous avons utilisé des transformées de Fourier rapides *TFR* (en anglais, *FFT* : Fast Fourier Transform). L'algorithme le plus utilisé est celui de Cooley et Tukey [26, 25]. Dans cet algorithme, n_x doit être une combinaison de puissance de 2, 3 ou de 5. Si la fonction f est complexe alors cet algorithme va réduire le nombre des opérations de n_x^2 (nombre d'opérations nécessaires dans le cas d'une transformée de Fourier lente c'est à dire sans manipulations algébriques) à $5n_x \log n_x - 6n_x$. Mais dans la plupart des cas, la fonction f est réelle et on a la relation suivante

$$\hat{f}_j = \hat{f}_{-j}^* \quad (2.54)$$

avec $\hat{f}^*$ qui correspond au complexe conjugué. Dans ce cas précis, le nombre des opérations est de $n_x \log n_x$.

La *TFR* est un algorithme récursif qui permet de calculer les coefficients de Fourier d'une fonction périodique ou semi-périodique sur un domaine physique uniforme. Il existe des versions de cet algorithme adaptées à différents emplois : transformation réelle-complexe, complexe-complexe, à une, deux ou trois dimensions... Un indicateur numérique permet de préciser le sens de la transformée, directe ou inverse. Les transformées utilisées dans le code sont optimisées pour les supercalculateurs de l'IDRIS.

2.6.2 Equivalence entre les différents opérateurs

L'originalité du code porte sur l'utilisation de schémas de haute précision combinés à un solveur de Poisson partiellement ou totalement spectral. Le fait d'utiliser à la fois des méthodes spectrales et des méthodes aux différences finies nous impose d'avoir une parfaite équivalence entre tous ces opérateurs. Cette équivalence est obtenue en ayant recours au concept du nombre d'onde modifié (2.56). Il permet de conserver la précision des schémas Hermitiens et de s'assurer de la compatibilité des conditions aux limites dans l'espace spectral.

Equivalence pour la dérivée première

Il est facile de montrer (voir Lele [62]) que les coefficients de Fourier $\hat{f}'_l$ associés à la relation (2.42) sont liés aux coefficients de Fourier $\hat{f}_l$ donnés par (2.50) par la relation suivante

$$\hat{f}'_l = \iota k'_x \hat{f}_l \quad (2.55)$$

ou k'_x est le nombre d'onde modifié pour la dérivée première relié au nombre d'onde k_x par la relation

$$k'_x \Delta x = \frac{a \sin(k_x \Delta x) + (b/2) \sin(2k_x \Delta x)}{1 + 2\alpha \cos(k_x \Delta x)} \quad (2.56)$$

De la même façon, on peut introduire un nombre d'onde modifié lorsque l'on utilise des conditions aux limites semi-périodiques (conditions de symétrie ou d'antisymétrie). Grâce au concept du nombre d'onde modifié et à la relation (2.55), on obtient l'équivalence entre une dérivation dans l'espace spectral (multiplication) et une dérivation dans l'espace physique, obtenue avec les schémas aux différences finies correspondants.

Pour le schéma d'ordre 2 (2.46), le nombre d'onde modifié k'_x pour la dérivée première est relié au nombre d'onde k_x par la relation

$$k'_x \Delta x = \sin(k_x \Delta x) \quad (2.57)$$

2.6.3 Formulation pour le solveur de Poisson

Lorsque l'on utilise des conditions aux limites périodiques dans la direction longitudinale de l'écoulement, l'équation de Poisson est résolue intégralement dans l'espace spectral.

La transformée de Fourier 3D utilisée dans le code pour la pression peut être écrite symboliquement par

$$\hat{p}_{lmn} = \frac{1}{n_x n_y n_z} \sum_i \sum_j \sum_k p_{ijk} W_x(-k_x x_i) W_y(-k_y y_j) W_z(-k_z z_k) \quad (2.58)$$

avec son expression inverse

$$p_{ijk} = \sum_l \sum_m \sum_n \hat{p}_{lmn} W_x(k_x x_i) W_y(k_y y_j) W_z(k_z z_k) \quad (2.59)$$

où les sommes, les fonctions de bases (W_x, W_y, W_z) et les nombres d'ondes (k_x, k_y, k_z) correspondent à ceux définis dans la section (2.6.1). Dans le but d'assurer la compatibilité entre tous les opérateurs, le calcul de $\nabla \cdot \mathbf{u}^*$ doit être effectué en respectant les conditions aux limites de la simulation. En posant, $D = \nabla \cdot \mathbf{u}^*$, la résolution de Poisson consiste en une simple division pour chaque mode de Fourier $\hat{D}_{lmn}$ par un facteur F_{lmn} avec

$$\hat{p}_{lmn}^{n+1} = \frac{\hat{D}_{lmn}}{F_{lmn}} \quad (2.60)$$

L'expression de ce facteur est donnée par

$$F_{lmn} = -(k_x'^2 + k_y'^2 + k_z'^2) c_k \Delta t \quad (2.61)$$

où (k'_x, k'_y, k'_z) sont les nombres modifiés dans chacune des directions de l'espace.

Lorsque l'on utilise une condition de type Dirichlet dans la direction longitudinale pour la vitesse, on ne procède pas tout à fait de la même façon que dans le cas précédent en raison de l'utilisation de schémas décentrés, incompatibles pour une équivalence avec un opérateur spectral. L'équation de Poisson est alors résolue dans l'espace spectral dans

les directions y et z et dans l'espace physique dans la direction x . La pression peut se développer alors partiellement en série de Fourier sous la forme

$$p_{ijk} = \sum_m \sum_n \hat{p}_{imn} W_y(k_y y_j) W_z(k_z z_k) \quad (2.62)$$

où k_y et k_z sont les nombres d'onde dans les directions y et z .

Une méthode a été développée pour **Incompact3d** par Lamballais [50]. Une fois discrétisée, l'équation de Poisson (2.29) s'écrit

$$\left(\frac{1}{\Delta x^2} \mathbf{A}_x^{-1} \mathbf{B}_x \mathbf{A}_x^{-1} \mathbf{B}_x - (k_y'^2 + k_z'^2) \mathbf{I} \right) \hat{p}_{imn} = \frac{1}{\Delta t} \hat{D}_{imn} \quad (2.63)$$

La résolution de ce système linéaire semble nécessiter l'inversion d'une matrice pleine. Mais il est possible de contourner ce problème, en utilisant une méthode de résolution directe. Lamballais [50] propose de reformuler le problème de la façon suivante

$$\mathbf{B}_x \hat{p}'_{imn} - ((k_y'^2 + k_z'^2) \Delta x \mathbf{A}_x \hat{p}_{imn} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \mathbf{A}_x \hat{\mathbf{D}}, \quad (2.64)$$

$$\Delta x \mathbf{A}_x \hat{p}_{imn} - \mathbf{B}_x \hat{p}_{imn} = 0. \quad (2.65)$$

Cette nouvelle formulation consiste à considérer comme inconnues du problème $\hat{p}'_{imn}$ et $\hat{p}_{imn}$, puis à diviser le système (2.63) en deux systèmes couplés équivalents dont les opérateurs matriciels sont de nature multidagonale. L'écriture finale du problème est obtenue en créant un vecteur $\mathbf{V}$ de dimension $2n_x$ dont les composantes sont constituées alternativement des composantes $\hat{p}'_{imn}$ et $\hat{p}_{imn}$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{2(n_x-1)} \\ V_{2n_x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{p}_{1mn} \\ \hat{p}'_{1mn} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{p}_{n_x mn} \\ \hat{p}'_{n_x mn} \end{pmatrix}$$

puis en écrivant l'équation matricielle, vérifiée par $\mathbf{V}$

$$\mathbf{C}\mathbf{V} = \mathbf{E} \quad (2.66)$$

où la matrice $\mathbf{C}$ et le vecteur $\mathbf{E}$ sont construits de façon consistante par rapport à $\mathbf{V}$. L'avantage de cette formulation est que l'inversion de la matrice $\mathbf{C}$ peut toujours se faire grâce à une méthode directe, cette matrice comprenant onze diagonales centrales non nulles.

La méthode de résolution de l'équation de Poisson utilisée dans **Incompact3d** permet de vérifier l'incompressibilité au zéro machine. En terme de coût de calcul, la résolution de cette équation coûte moins de 10% du coût total en temps de calcul sur un supercalculateur d'architecture vectorielle (NEC SX5) pour une simulation avec des conditions périodiques dans la direction longitudinale (simulation temporelle), et moins de 30% du coût total en temps de calcul avec des conditions aux limites de type Dirichlet (simulation spatiale).

2.7 Limitations de cette version du code de calcul

Ce code a été validé sur plusieurs configurations d'écoulement et il a permis d'obtenir d'excellents résultats (jet rond [54], jets contrôlés [56], couche de mélange avec contrôle [57, 55], jets tournants [43], écoulements autour d'un cylindre [80, 95],...).

Nous allons dans cette partie faire un point sous forme de tableau sur les limitations du code lorsque nous l'avons pris en main au début de cette thèse. Les résultats sont présentés dans le tableau (2.2).

A la lecture de ce tableau, on remarque de nombreuses limitations pour cette version du code

- Le choix dans les combinaisons pour les conditions aux limites est extrêmement réduit. En effet, les transformées de Fourier rapides utilisées dans le code, même si elles sont très performantes en termes de coût de calcul, n'ont été développées que pour un nombre réduit de combinaisons. C'est pourquoi il n'est pas possible par exemple avec cette version du code d'utiliser des conditions de type glissement libre dans les directions x et y .
- Il n'est pas possible non plus d'utiliser des conditions de type Dirichlet dans plusieurs directions spatiales. Par exemple, une simulation avec des conditions de type entrée/sortie combinées avec des frontières ouvertes n'est pas envisageable en raison du traitement particulier dans l'espace spectral de l'équation de Poisson. Cette méthode qui s'avère très efficace en termes de précision et de rapidité de calcul n'a en revanche aucune souplesse quant aux choix des conditions aux limites.
- Lorsque l'on souhaite réaliser des simulations d'écoulements en milieu ouvert pour lesquels aucun effet de confinement (du à la présence des parois par exemple) n'est censé exister, il est impossible d'envisager l'utilisation d'un raffinement de maillage. Il est assez facile cependant de raffiner le maillage avec des opérateurs aux différences finies mais cela ne concernerait que les simulations spatiales avec des conditions de type Dirichlet dans la direction longitudinale. Le traitement spectral de l'équation de Poisson nous empêche d'utiliser un maillage inhomogène lorsque l'on utilise des conditions périodiques ou de type glissement libre. Lardeau [54], lors de ses simulations de contrôle de couche de mélange a rencontré ce genre de problème lié à l'utilisation de condition périodiques ou de glissement libre dans la direction transversale de l'écoulement.

De plus, dans la configuration d'écoulement qui nous intéresse à savoir la couche de mélange avec modélisation de la plaque séparatrice grâce à la méthode de forçage direct, il est indispensable de décrire parfaitement la géométrie de la plaque. C'est pourquoi un raffinement du maillage au niveau de cette plaque semble indispensable. Avec cette version du code, il est impossible de simuler un tel écoulement.

- Lors de l'utilisation de la méthode de forçage direct, Parnaudeau *et al.* [80], Silvestrini et Lamballais [96, 52] ont montré que l'on obtenait de très bons résultats en termes de coûts de calcul et de précision mais que l'on observait des oscillations sur le champ de pression. La nature collocalisée du maillage est responsable de ces oscillations. Des études ont montrées qu'avec ces méthodes de forçage, il y avait

Incompact3d	Dirich. x	Dirich. y	Dirich. z	Péριο. x	Péριο. y	Péριο. z
<i>Ancienne version</i>	oui	non	non	oui	oui	oui
Incompact3d	Gliss. x	Gliss. y	Gliss. z	Inhomo. x	Inhomo. y	Inhomo. z
<i>Ancienne version</i>	non	non	oui	non	non	non
Incompact3d	Décal. x	Décal. y	Décal. z	Coût résolution Poisson		
<i>Ancienne version</i>	non	non	non	30% avec Dirich., 10% sinon		

TAB. 2.2 – Possibilités et limitations du code **Incompact3d** dans sa version antérieure pour des simulations tridimensionnelles. Légende : *Dirich.* : Condition aux limites de type Dirichlet ; *Péριο.* : Condition aux limites périodique ; *Gliss.* : condition aux limites de type glissement libre ; *Inhomo.* : utilisation d'un maillage inhomogène dans la direction considérée ; *Décal.* : utilisation de schémas Hermiteiens décalés dans la direction considérée.

excitation de modes parasites sur le champ de pression [69, 70]. Nous reviendrons par la suite sur ce point. Bien que ces dernières diminuent avec l'augmentation des points de grille, le fait de ne pas pouvoir utiliser des schémas décalés pour la pression est un gros handicap lorsque l'on combine le code à une méthode de forçage directe.

Le prochain chapitre présente les développements numériques que nous avons apportés à **Incompact3d**. Pour chaque amélioration du code, nous complèterons le tableau (2.2).

Chapitre 3

Développements numériques

Incompact3d est un code qui est développé depuis de nombreuses années au laboratoire. Il a subi un nombre important de modifications afin de l'améliorer et d'accroître son champ d'application. De ce fait, les versions de **Incompact3d** se sont multipliées même si à chaque fois, un effort particulier a été fait pour garder une certaine cohérence d'une version à l'autre.

Le premier travail de cette thèse a donc été de regrouper ces différentes versions et d'actualiser le code en le convertissant en *Fortran* 90, tout en changeant les sous-programmes pour les transformées de Fourier. En effet, ces sous-programmes, écrits en *Fortran* 77, qui permettent de passer de l'espace physique à l'espace spectral ne permettaient pas d'envisager un grand nombre de combinaisons pour les conditions aux limites comme le montre le tableau (3.1). Les bibliothèques de *TFR* de l'IDRIS étant optimisées pour les supercalculateurs vectoriels, nous nous sommes naturellement tourné vers cet organisme pour le choix de nos *TFR*. Nous avons choisi d'utiliser JMFFT qui est une bibliothèque de sous-programmes de transformées de Fourier écrite par Jean-Marie Teuler, émulant la plupart des sous-programmes de transformées de Fourier de la bibliothèque Cray (la SCILIB). JMFFT offre les avantages suivants

- Elle est très complète : elle couvre la plupart des sous-programmes de la SCILIB CRAY, y compris certaines versions obsolètes (vectorisation optimale et toutes les combinaisons possibles de conditions aux limites pour le code deviennent envisageables).
- Elle est très portable avec possibilité d'utiliser les *TFR* en local avec un compilateur Fortran 90.
- Elle est très simple à utiliser car elle émule exactement les séquences d'appel de la SCILIB CRAY : mêmes arguments et mêmes dimensions. Bien que ceci n'ait pas été le souci majeur lors de sa conception, JMFFT est raisonnablement performante.
- Elle peut être assez facilement optimisée pour une architecture donnée car tout le temps de calcul se passe dans un petit nombre de boucles d'environ 30 lignes.
- L'IDRIS dispose d'une assistance très compétente. Il est possible de contacter à tout moment Jalel Chergui qui s'occupe à l'IDRIS de la mise à jour de la bibliothèque et des éventuels soucis rencontrés par les utilisateurs.

Incompact3d	Dirich. x	Dirich. y	Dirich. z	Pério. x	Pério. y	Pério. z
<i>Ancienne version</i>	oui	non	non	oui	oui	oui
<i>Nouvelle version</i>	oui	non	non	oui	oui	oui
Incompact3d	Gliss. x	Gliss. y	Gliss. z	Inhomo. x	Inhomo. y	Inhomo. z
<i>Ancienne version</i>	non	non	oui	non	non	non
<i>Nouvelle version</i>	oui	oui	oui	non	non	non
Incompact3d	Décal. x	Décal. y	Décal. z	Coût résolution Poisson		
<i>Ancienne version</i>	non	non	non	30% avec Dirich., 10% sinon		
<i>Nouvelle version</i>	non	non	non	30% avec Dirich., 10% sinon		

TAB. 3.1 – Comparaison entre les possibilités du nouveau code **Incompact3d** avec la version antérieure pour des simulations tridimensionnelles après la bascule en Fortran 90 et le changement des sous-routines pour les transformées de Fourier rapides.

Comme le montre le tableau (3.1), le simple changement de ces sous-routines nous permet d'utiliser des conditions aux limites de type glissement libre dans les trois directions spatiales.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, **Incompact3d** comporte un certain nombre de limitations. Dans ce chapitre nous allons présenter les développements principaux entrepris durant cette thèse, avec pour objectif de pouvoir réaliser une simulation de couche de mélange spatiale avec la prise en compte des parois grâce à la méthode de forçage direct. La première partie de ce chapitre sera consacrée à la mise en œuvre d'un solveur de Poisson totalement spectral dans un contexte de simulation spatiale dans le but de pouvoir utiliser des conditions de Dirichlet sur la vitesse dans plusieurs directions spatiales à la fois. Dans la deuxième partie, nous détaillerons les nouveaux opérateurs aux différences finies et spectraux sur une grille décalée pour le champ de pression. Enfin, la troisième partie de ce chapitre présentera une méthode de raffinement d'un maillage cartésien.

3.1 Nouvelle version du solveur de Poisson

Lorsque l'on souhaitait réaliser une simulation spatiale, on disposait d'un solveur mixte différences finies / méthodes spectrales qui nécessitait l'inversion d'une matrice à onze diagonales. Cette méthode permettait de réaliser des simulations spatiales avec des conditions de type Dirichlet dans une seule direction de l'espace. Cependant, il n'était pas envisageable d'utiliser une condition de ce type avec une frontière ouverte dans la direction transversale de l'écoulement par exemple.

Afin d'augmenter les combinaisons possibles dans le jeu de conditions aux limites d'une simulation, nous avons remis en cause l'incompatibilité d'utiliser un solveur totalement spectral avec des conditions aux limites de types Dirichlet pour la vitesse. Nous avons mis au point une méthode qui permet d'utiliser n'importe quel type de conditions aux limites dans toutes les directions de l'espace. L'inspiration pour cette méthode nous est venue des

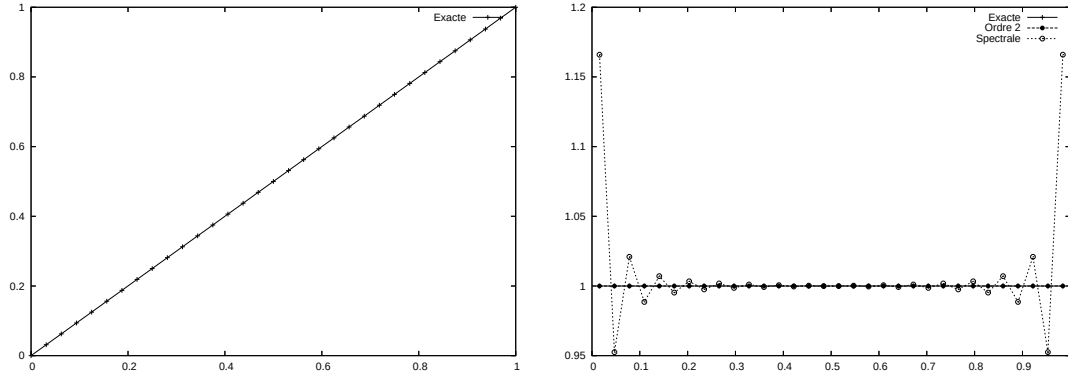


FIG. 3.1 – Exemple d'un traitement spectral de la fonction $f(x) = x$. Gauche : Visualisation de la fonction $y = x$. Droite : Visualisation de la dérivée calculée spectralement et avec des schémas aux différences finies décalées d'ordre 2.

travaux de Lowery et Reynolds [66] qui ont étudié le développement spatial d'une couche de mélange avec un maillage inhomogène dans une direction avec des schémas d'ordre 2.

3.1.1 Principe de la méthode

L'utilisation d'opérateurs spectraux avec une fonction apériodique semble à première vue incompatible. Comme nous allons le voir, nous nous sommes placés dans un contexte de maillage décalé pour expliquer le principe de la méthode avec notamment l'utilisation d'un schéma décalé d'ordre 2 qui présente l'avantage de ne faire aucune hypothèse lors du calcul d'une dérivée. Ce genre de schémas nous a donc semblé tout à fait approprié pour la discussion qui va suivre. Nous avons effectué une série de test 1D avec une fonction apériodique.

On se donne une distribution uniforme de n_x points x_i sur un intervalle $[0, 1]$ avec

$$x_i = (i - 1)\Delta x, \quad i = 1, \dots, n_x. \quad (3.1)$$

et la fonction apériodique $f(x) = x$ définie sur le domaine $[0, 1]$. En utilisant un schéma aux différences finies décalé d'ordre 2 du type

$$f'_{i+1/2} = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}, \quad i = 0, \dots, n_x - 1 \quad (3.2)$$

il est possible de calculer la dérivée de cette fonction f avec une précision exacte sur les points de grille $x_{i+1/2} = (i + 1/2)\Delta x$. En effet, aucune hypothèse n'est faite sur les frontières du domaine.

En effectuant cette opération dans l'espace spectral, à l'aide de la transformée en cosinus décalé

$$\hat{f}_l = \frac{1}{n_x} \sum_{i=1}^{n_x} f_{i+1/2} \cos(k_x x_{i+1/2}) \quad (3.3)$$

et de la relation

$$\hat{f}'_l = \iota k_x \hat{f}_l \quad (3.4)$$

on observe des oscillations en dent de scie (Figure (3.1)) qui viennent contaminer l'évaluation de la dérivée première. Ces oscillations sont caractéristiques du phénomène de Gibbs propre aux méthodes spectrales. Pour plus d'informations sur ce phénomène, le lecteur pourra se référer à Canuto *et al.* [19].

Nous savons que grâce au nombre d'onde modifié, il est possible d'obtenir l'équivalence entre une dérivée calculée à l'aide d'un schéma aux différences finies et une dérivée calculée dans l'espace spectral. Le nombre d'onde associé au schéma décalé d'ordre 2 de la formule (3.2) est donné par la relation

$$k'_x \Delta x = 2 \sin(k_x \Delta x / 2) \quad (3.5)$$

Si on remplace, le nombre d'onde k_x dans la relation (3.4) par ce nombre d'onde modifié alors nous obtenons l'équivalence parfaite avec le schéma décalé d'ordre 2 et donc une précision au zéro machine pour l'estimation de la dérivée de la fonction considérée. On peut noter que l'utilisation du concept du nombre d'onde modifié permet d'annuler les effets d'un développement en cosinus puisque toutes les oscillations ont disparu.

La transformée de Fourier décalée en cosinus fait l'hypothèse que la dérivée de la fonction f est nulle sur les bords du domaine. Or on a $f'(x) = 1$ sur tout le domaine. C'est à cause de ce conflit sur les conditions aux limites qu'apparaissent les oscillations en dent de scie. Cependant si on choisit une fonction qui vérifie l'hypothèse de dérivée nulle sur les bords du domaine, on peut espérer que les oscillations en dent de scie qui contaminent l'évaluation de la dérivée première vont s'atténuer.

Afin de valider cette hypothèse, nous avons essayé de calculer spectralement la dérivée première d'une fonction telle que $f'(0) = 0$ et $f'(1) = 0$.

Soit le polynôme $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$. La figure (3.2) montre la dérivée de cette fonction calculée spectralement et avec le schéma décalé d'ordre 2 (3.2). On constate que les oscillations ont disparus visuellement. En réalité le phénomène de Gibbs est toujours présent comme le montre la figure (3.3) mais à une échelle très petite de l'ordre de 10^{-6} dans notre exemple. Par ailleurs, on peut voir que l'utilisation d'un schéma Hermitien d'ordre 6 permet de diminuer sensiblement le phénomène de Gibbs au centre du domaine de calcul. En effet, les oscillations ne sont plus visibles que sur 4 points à chaque frontière du domaine. On observe que la décroissance des oscillations est beaucoup plus rapide pour la dérivée calculée avec le schéma Hermitien d'ordre 6 qu'avec la dérivée calculée spectralement. On voit donc que pour une fonction dont les dérivées sont nulles sur les bords du domaine, un traitement spectral pour le calcul de la dérivée est envisageable.

Nous avons réalisé une analyse de convergence sur l'erreur de discrétisation donnée par la différence entre la vitesse calculée u_c et la valeur analytique de cette vitesse u_a

$$\text{Erreur} = \sqrt{\frac{1}{n_x} \sum_{i=1}^{n_x} (u_c(x_i) - u_a(x_i))^2} \quad (3.6)$$

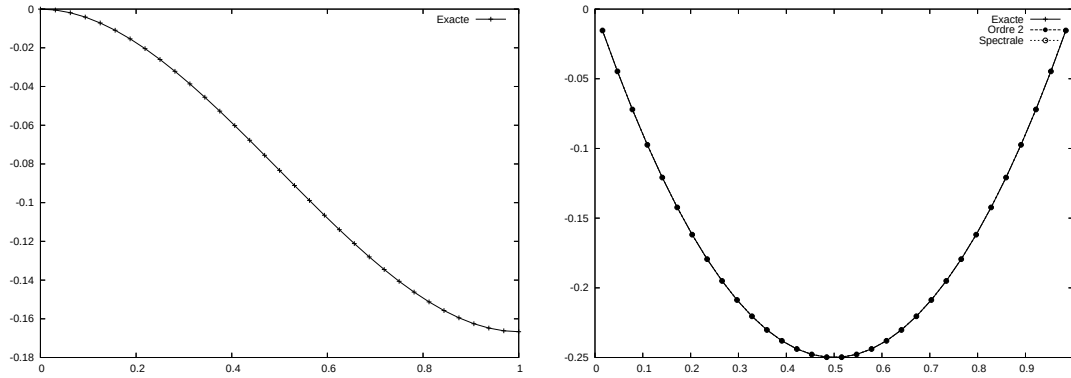


FIG. 3.2 – Exemple d'un traitement spectral de la fonction apériodique $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$. Gauche : Visualisation de la fonction. Droite : Visualisation de la dérivée calculée spectralement et avec des schémas aux différences finies décalées d'ordre 2 (les courbes sont confondues).

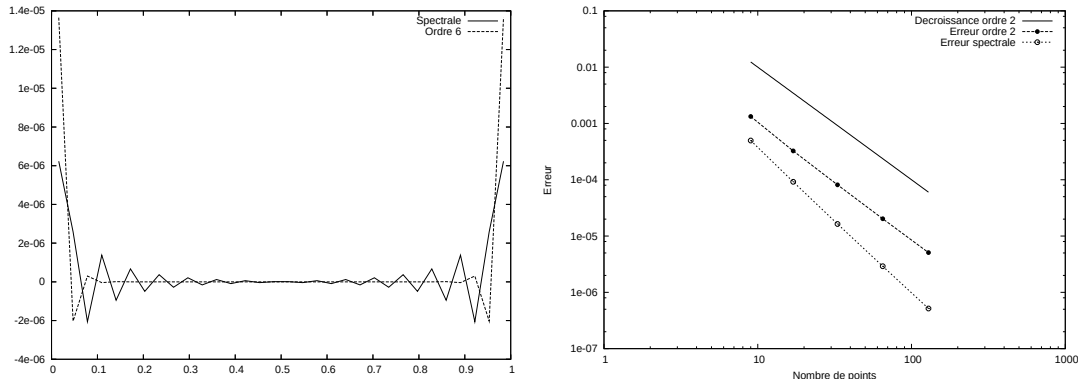


FIG. 3.3 – Figure de gauche : Visualisation du phénomène de Gibbs. Courbe obtenue par la différence entre la dérivée exacte et la dérivée calculée spectralement et entre la dérivée exacte et une dérivée calculée avec un schéma Hermitien d'ordre 6 de la fonction $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$. Figure de droite : Décroissance de l'erreur avec le nombre de points. La ligne pleine correspond à une décroissance d'ordre 2 en n_x^{-2} . Symboles : $\bullet$: Erreur du schéma décalé d'ordre 2. $\circ$: Erreur de la dérivée calculée spectralement.

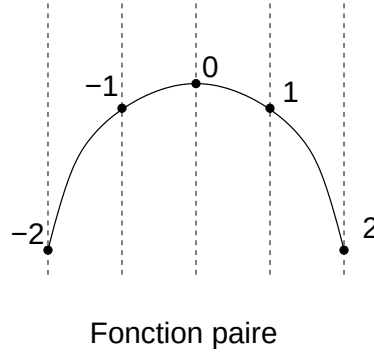


FIG. 3.4 – Illustration de la condition aux limites utilisées. Les points -1 et -2 sont des points «fantômes».

Les résultats de ces deux tests de convergence sont présentés sur la figure (3.3). On remarque que l'erreur pour le schéma décalé d'ordre 2 converge bien à l'ordre 2. Pour la dérivée spectrale, on constate que l'on perd la convergence exponentielle pour retrouver une convergence d'ordre 2,5. De plus, cette erreur est plus petite d'un facteur environ égal à 6 que l'erreur obtenue avec le schéma d'ordre 2.

Par ailleurs, nous avons vérifié que le principe de l'équivalence entre les opérateurs était bien vérifié avec le nombre d'onde modifié pour une grille décalée. Calculer la dérivée avec un schéma aux différences finies revient à calculer cette dérivée dans l'espace spectral avec le nombre d'onde modifié correspondant au schéma utilisé.

Nous allons maintenant expliquer pourquoi nous obtenons une convergence d'ordre 2,5. Dans un premier temps, nous allons essayer de calculer la convergence de l'erreur pour le premier point de grille (c'est à dire à i constant et à $x_{i+1/2}$ variable). La figure (3.4) montre l'hypothèse utilisée pour déterminer la valeur des points «fantômes» utilisés dans le calcul de la dérivée spectrale. Pour plus de simplicité, nous allons déjà écrire la dérivée pour la dérivée avec un schéma d'ordre 4 explicite, puis nous généraliserons pour une dérivée calculée spectralement. La dérivée première calculée avec un schéma décalé explicite d'ordre 4 s'écrit sous la forme

$$f'_{i+1/2} = \frac{9}{8} \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} - \frac{1}{8} \frac{f_{i+2} - f_{i-1}}{3\Delta x} + O(\Delta x^4), \quad i = 0, \dots, n_x - 1 \quad (3.7)$$

Comme on peut le voir pour le calcul de la dérivée au premier point décalé de grille $x_{1/2}$, on a besoin de la connaissance de la fonction f sur pour le point «fantôme» f_{-1} . Pour ce point, la fonction peut être développée en série de Taylor sous la forme

$$f_{-1} = f_0 - (\Delta x)f'_0 + \frac{(\Delta x)^2}{2!}f''_0 - \frac{(\Delta x)^3}{3!}f^{(3)}_0 + \frac{(\Delta x)^4}{4!}f^{(4)}_0 + O(\Delta x^5) \quad (3.8)$$

Dans notre exemple, nous utilisons donc une hypothèse de parité à savoir $f_1 = f_{-1}$. On

peut aussi exprimer la fonction f sous forme de série de Taylor pour le point x_1

$$f_1 = f_0 + (\Delta x)f'_0 + \frac{(\Delta x)^2}{2!}f''_0 + \frac{(\Delta x)^3}{3!}f_0^{(3)} + \frac{(\Delta x)^4}{4!}f_0^{(4)} + O(\Delta x^5) \quad (3.9)$$

Dans la relation, (3.7), on a besoin d'exprimer la différence $|f_1 - f_{-1}|$. Si on cherche à exprimer cette différence, on obtient

$$|f_1 - f_{-1}| = 2(\Delta x)f'_0 + 2\frac{(\Delta x)^3}{3!}f_0^{(3)} + O(\Delta x^5) \quad (3.10)$$

Comme nous avons $f'_0 = 0$ (Hypothèse de départ : étude d'une fonction dont la dérivée est nulle sur les bords du domaine), on obtient

$$|f_1 - f_{-1}| = 2\frac{(\Delta x)^3}{3!}f_0^{(3)} + O(\Delta x^5) \quad (3.11)$$

De plus, pour le calcul de la dérivée, il faut diviser la différence $|f_1 - f_{-1}|$ par Δx , on obtient finalement

$$\frac{|f_1 - f_{-1}|}{\Delta x} = 2\frac{(\Delta x)^2}{3!}f_0^{(3)} + O(\Delta x^4) \quad (3.12)$$

Dans un premier temps, il est important de souligner que la condition de dérivée nulle sur les bords permet d'obtenir la convergence de la différence $|f_1 - f_{-1}|$. Si cette hypothèse n'est pas respectée, la valeur de cette différence augmenterait avec une augmentation de la résolution du maillage. Dans un second temps, on voit donc que l'hypothèse de périodicité utilisée génère sur le premier point décalé de grille (i constant et à x_i variable), une erreur qui converge à l'ordre 2. En effectuant un raisonnement analogue tout en augmentant l'ordre du schéma explicite, nous obtenons une erreur sur le premier point de grille d'ordre 2 pour un schéma explicite d'ordre n_x .

Nous allons maintenant calculer la dérivée mais avec un schéma Hermitien d'ordre 4. La dérivée première calculée avec un schéma décalé explicite d'ordre 4 s'écrit sous la forme

$$\frac{1}{22}f'_{i-1/2} + f'_{i+1/2} + \frac{1}{22}f'_{i+3/2} = \frac{12}{11}\frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x^4), \quad i = 0, \dots, n_x - 1 \quad (3.13)$$

Comme on peut le voir pour le calcul de la dérivée au premier point décalé de grille $x_{1/2}$, on a besoin de la connaissance de la fonction f' sur pour le point «fantôme» $f'_{-1/2}$. Pour ce point, la fonction peut être développée en série de Taylor sous la forme

$$f'_{-1/2} = f'_0 - \frac{(\Delta x)}{2}f''_0 + \frac{(\Delta x)^2}{4 \cdot 2!}f_0^{(3)} - \frac{(\Delta x)^3}{8 \cdot 3!}f_0^{(4)} + \frac{(\Delta x)^4}{16 \cdot 4!}f_0^{(5)} + O(\Delta x^5) \quad (3.14)$$

Dans notre exemple, comme nous utilisons l'hypothèse que f est paire cela implique que f' est impaire à savoir $f'_{-1/2} = -f'_{1/2}$. On peut aussi exprimer la fonction f' sous forme de série de Taylor pour le point $x_{1/2}$

$$f'_{1/2} = f'_0 + \frac{(\Delta x)}{2}f''_0 + \frac{(\Delta x)^2}{4 \cdot 2!}f_0^{(3)} + \frac{(\Delta x)^3}{8 \cdot 3!}f_0^{(4)} + \frac{(\Delta x)^4}{16 \cdot 4!}f_0^{(5)} + O(\Delta x^5) \quad (3.15)$$

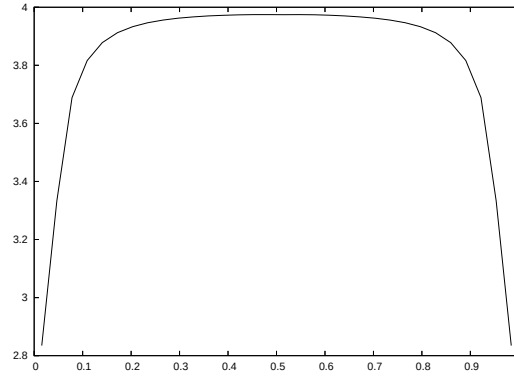


FIG. 3.5 – *Evolution longitudinale de l'ordre de l'erreur basée sur la différence en un point entre la valeur exacte de la dérivée et son estimation spectrale pour la fonction $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$.*

De la même façon qu'avec le schéma explicite on va chercher à exprimer la différence $|f'_{-1/2} + f'_{1/2}|$ pour évaluer l'ordre de l'erreur sur le calcul de la dérivée pour le premier point de grille

$$\frac{|f'_{1/2} - f'_{-1/2}|}{\Delta x} = 2 \frac{(\Delta x)^2}{4 \cdot 2!} f_0^{(3)} + 2 \frac{(\Delta x)^4}{16 \cdot 4!} f_0^{(5)} + O(\Delta x^5) \quad (3.16)$$

Comme on peut le voir, on obtient également une erreur d'ordre 2 et en augmentant l'ordre du schéma, on obtient une erreur d'ordre 2 pour le premier point de grille avec un schéma d'ordre n_x .

Pour une dérivée spectralement, nous avons ainsi une estimation pour la dérivée au point $x_{1/2}$ qui converge à l'ordre 2. Dans la zone située au centre du domaine de calcul, l'estimation de la dérivée est moins «sensible» à cette hypothèse sur les bords, c'est pourquoi l'erreur converge dans cette zone à un ordre supérieur à 2. Ceci explique que nous trouvons une convergence globale d'ordre supérieur à 2.

Enfin, nous avons aussi calculé l'évolution longitudinale pour un x constant (et donc à i variable) de l'ordre de l'erreur basée sur la différence entre la valeur exacte de la dérivée et son estimation spectrale. La figure (3.5) montre que pour une large zone située autour du centre du domaine de calcul, on obtient un ordre proche de 4. A noter que sur les bords la convergence n'est pas égale à 2 mais est proche de 2,8. Ceci s'explique par le fait que cette courbe a été réalisée à i variable pour un x donné : plus on augmente la résolution pour le calcul de la convergence de l'erreur plus l'influence de l'hypothèse de périodicité diminue. Les points choisis pour tracer cette courbe proviennent d'une grille avec 32 points. Cette courbe nous montre que l'ordre de l'erreur augmente rapidement pour atteindre une valeur maximale sur une large zone du domaine de calcul. Dans cette zone, l'influence des hypothèses aux bords est très faible.

Ce petit test nous montre

- qu'il est possible d'utiliser un opérateur spectral pour l'évaluation d'une fonction apériodique, sous certaines conditions (dérivée nulle sur les bords du domaine).

- que l'ordre de convergence de l'erreur définie par la relation (3.6) est de 2,5 pour une dérivée calculée spectralement.
- que cette méthode combinée avec le nombre d'onde modifié permet de conserver l'équivalence entre un opérateur aux différences finies et un opérateur spectral.
- que cette méthode est compatible avec des schémas collocalisés et des transformées de Fourier classiques.

Nous allons maintenant détailler l'application de cette méthode pour la résolution de l'équation de Poisson dans le code de calcul.

3.1.2 Application à la résolution de l'équation de Poisson

Nous utilisons une méthode à pas fractionnaire pour la résolution des équations de Navier-Stokes (2.1) en raison du fort couplage entre le champ de pression et le champ de vitesse. Cette méthode est couramment utilisée dans un contexte de simulation spectrale [45, 61].

Dans un premier temps, on calcule un champ de vitesse intermédiaire $\mathbf{u}^*$, à divergence non nulle, uniquement à partir des termes $\mathbf{F}^k$ et $\mathbf{F}^{k+1}$. Dans un second temps, ce champ est corrigé par le gradient de la pression obtenue par la résolution de l'équation de Poisson. La pression, qui permet d'assurer la divergence nulle, est donc obtenue par la résolution de l'équation de Poisson définie à partir de $\mathbf{u}^*$. Il est commun d'utiliser une condition de type Neumann homogène quand on utilise cette méthode.

Connaissant $\mathbf{u}^k$ et p^k , on en déduit $\mathbf{u}^{k+1}$ et p^{k+1} par la résolution de

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^k}{\Delta t} &= a_k \mathbf{F}^k + b_k \mathbf{F}^{k-1} \\ \frac{\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} &= -c_k \nabla \tilde{p}^{k+1} \end{aligned} \quad (3.17)$$

avec la condition de divergence nulle

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{k+1} = 0 \quad (3.18)$$

et des conditions aux limites de type Dirichlet pour le champ de vitesse,

$$\mathbf{u}^{k+1}|_{\Gamma} = \mathbf{u}_{CAL}^{k+1} \quad (3.19)$$

avec Γ qui matérialise la frontière du domaine de calcul.

La condition aux limites de type Neumann homogène pour la vitesse s'écrit

$$\left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial n} \right)^{k+1} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (3.20)$$

Si on écrit la condition aux limites suivant la composante normale $\mathbf{n}$ et la composante tangentielle τ on obtient

$$\mathbf{u}^{k+1} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_{CAL}^{k+1} \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma \quad (3.21)$$

et

$$\mathbf{u}^{k+1} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{u}_{CAL}^{k+1} \cdot \boldsymbol{\tau} \quad \text{sur } \Gamma \quad (3.22)$$

Pour la composante normale, nous avons grâce à la condition de type Neumann homogène sur la pression

$$\mathbf{u}^{k+1} | \Gamma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_{CAL}^{k+1} \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma \quad (3.23)$$

Pour la condition tangentielle, nous avons

$$\mathbf{u}^{k+1} | \Gamma \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{u}_{CAL}^{k+1} \cdot \boldsymbol{\tau} - c_k \Delta t \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tau} \right)^{k+1} \quad \text{sur } \Gamma \quad (3.24)$$

On voit qu'avec cette méthode, on introduit une vitesse de glissement sur la frontière du domaine Γ matérialisée par $c_k \Delta t \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tau} \right)^{k+1}$. Un moyen de réduire cette vitesse de glissement est de modifier le champ de vitesse intermédiaire $\mathbf{u}^*$ en posant

$$\mathbf{u}^* \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{u}_{CAL}^{k+1} \cdot \boldsymbol{\tau} + c_k \Delta t \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tau} \right)^k \quad \text{sur } \Gamma \quad (3.25)$$

ce qui va donner

$$\mathbf{u}^{k+1} | \Gamma \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{u}_{CAL}^{k+1} \cdot \boldsymbol{\tau} + c_k \Delta t \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tau} \right)^k - c_k \Delta t \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tau} \right)^{k+1} \quad (3.26)$$

avec une vitesse de glissement $\mathbf{V}_g$ définie par

$$\mathbf{V}_g = c_k \Delta t \left[\left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tau} \right)^k - \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tau} \right)^{k+1} \right] \quad (3.27)$$

A noter que l'erreur induite par cette vitesse de glissement est de l'ordre de $O(t^2)$ (Voir Raspo *et al.* [87], Goda [37]).

Cette méthode permet de vérifier la condition de divergence nulle au zéro machine moyennant la création d'une vitesse de glissement $\mathbf{V}_g$ sur la frontière du domaine de calcul, tout en utilisant une condition de Neumann homogène pour le champ de pression.

Il faut aussi veiller à conserver une stricte équivalence entre les différents opérateurs qui interviennent dans l'équation de Poisson (2.29). C'est à dire que pour le calcul du terme de gauche de cette équation, il faut utiliser des schémas centrés et abandonner les schémas décentrés définis dans la partie (2.5.2). Cette méthode fonctionne aussi avec les schémas collocalisés utilisés habituellement dans le code de calcul.

Lors de la résolution de l'équation de Poisson, il est indispensable de conserver une stricte équivalence entre tous les opérateurs discrets qui interviennent. Nous avons ainsi mis au point des nouveaux opérateurs aux différences finies puisqu'il faut appliquer une condition de périodicité ou de type glissement libre à une fonction apériodique, ce qui à première vue peut paraître déroutant. Avec les schémas décentrés aucune hypothèse n'était faite pour le calcul des dérivées. Etant donné qu'on utilise maintenant des schémas

centrés d'ordre 6, on est obligé de faire des hypothèses pour la connaissance de la fonction sur les nœuds «fantômes». Ces nœuds sont situés de part et d'autre de la frontière du domaine. Ils n'existent pas physiquement mais ils sont indispensables pour le calcul de la dérivée.

La méthode consiste à prendre en compte les valeurs f_1 et f_{n_x} de la fonction sur les bords du domaine et de les inclure dans le calcul de la valeur des points «fantômes». Les nouvelles hypothèses pour f sont donc

$$f_0 = 2f_1 - f_2, \quad f_{-1} = 2f_1 - f_3, \quad f_{n_x+1} = 2f_{n_x} - f_{n_x-1} \quad \text{et} \quad f_{n_x+2} = 2f_{n_x} - f_{n_x-2}$$

et pour sa dérivée f'

$$f'_0 = f'_2 \quad \text{et} \quad f'_{n_x+1} = f'_{n_x-1}$$

On fait l'hypothèse que f_1 et f_{n_x} ne sont pas nulles et on impose $|f_1 - f_0| = |f_2 - f_1|$ et $|f_{n_x} - f_{n_x-1}| = |f_{n_x+1} - f_{n_x}|$. C'est une sorte d'extrapolation qui présente l'avantage d'être compatible avec les conditions aux limites envisagées. Les nouvelles matrices pour le calcul de la dérivée de f s'écrivent sous la forme

$$\mathbf{A}_x = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & & & & & & & \\ \alpha & 1 & \alpha & & & & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & & \alpha & 1 & \alpha \\ & & & & & & & 2\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_x = \begin{pmatrix} -2a - 2b & 2a & 2b & & & & & & \\ -a - 2b & b & a & b & & & & & \\ -b & -a & 0 & a & b & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & -b & -a & 0 & a & b & \\ & & & & -b & -a & b & a + 2b & \\ & & & & & 2b & 2a & 2a + 2b \end{pmatrix}$$

Grâce à cette méthode, il est possible d'utiliser le solveur de Poisson défini dans la partie (2.6.3) dans un contexte de simulation spatiale. En posant, $D = \nabla \cdot \mathbf{u}^*$, la résolution de Poisson consiste en une simple division pour chaque mode de Fourier $\hat{D}_{lmn}$ par un facteur F_{lmn} avec

$$\hat{p}_{lmn}^{n+1} = \frac{\hat{D}_{lmn}}{F_{lmn}} \quad (3.28)$$

L'expression de ce facteur est donnée par

$$F_{lmn} = -(k_x'^2 + k_y'^2 + k_z'^2)c_k \Delta t \quad (3.29)$$

Incompact3d	Dirich. x	Dirich. y	Dirich. z	Pério. x	Pério. y	Pério. z
<i>Ancienne version</i>	oui	non	non	oui	oui	oui
<i>Nouvelle version</i>	oui	oui	oui	oui	oui	oui
Incompact3d	Gliss. x	Gliss. y	Gliss. z	Inhomo. x	Inhomo. y	Inhomo. z
<i>Ancienne version</i>	non	non	oui	non	non	non
<i>Nouvelle version</i>	oui	oui	oui	non	non	non
Incompact3d	Décal. x	Décal. y	Décal. z	Coût résolution Poisson		
<i>Ancienne version</i>	non	non	non	30% avec Dirich., 10% sinon		
<i>Nouvelle version</i>	non	non	non	10% tout le temps		

TAB. 3.2 – Comparaison entre les possibilités du nouveau code **Incompact3d** avec la version antérieure pour des simulations tridimensionnelles après la modification de solveur de Poisson.

où (k'_x, k'_y, k'_z) sont les nombres modifiés dans chacune des directions de l'espace.

Le tableau (3.2), nous montre qu'avec ce solveur il est maintenant possible d'utiliser n'importe quel type de conditions aux limites pour réaliser une simulation tridimensionnelle. En effet, la méthode que nous avons mis au point peut non seulement être utilisée dans toutes les directions de l'espace mais on peut l'utiliser dans les trois directions à la fois. Par exemple, il est possible de simuler un écoulement de couche de mélange avec des conditions de type entrée/sortie pour la vitesse dans la direction longitudinale et des conditions de type frontière ouverte dans la direction vertical de l'écoulement.

Dans cette nouvelle version du solveur de Poisson, nous avons abandonné la formulation mixte différence finies/méthodes spectrales pour un formalisme identique à une simulation temporelle. La résolution de l'équation de Poisson coûte désormais moins de 10% du coût de calcul total pour une simulation spatiale au lieu des 30% de l'ancienne version.

3.2 Décalage du champ de pression

Jusqu'à présent, tous les développements du code de calcul s'effectuaient sur un maillage cartésien collocalisé, les champs de pression et de vitesses étant situés sur les mêmes nœuds de grille. Nous nous sommes interrogés sur l'opportunité de travailler avec un maillage décalé, à la suite des travaux menés par Parnaudeau *et al.* [80] lors de l'utilisation d'une méthode de forçage directe.

En regardant en détail le champ de pression de l'écoulement derrière un cylindre, on a pu observé des oscillations sur le champ de pression comme le montre la figure (3.6). La combinaison du code avec la méthode de forçage direct semble entraîner l'apparition de modes parasites sur le champ de pression. A noter que c'est uniquement lors de l'utilisation de la méthode de forçage que ces oscillations apparaissent. Il est reconnu que la nature collocalisée d'un schéma de discrétisation peut être responsable de ces modes parasites sur le champ de pression.

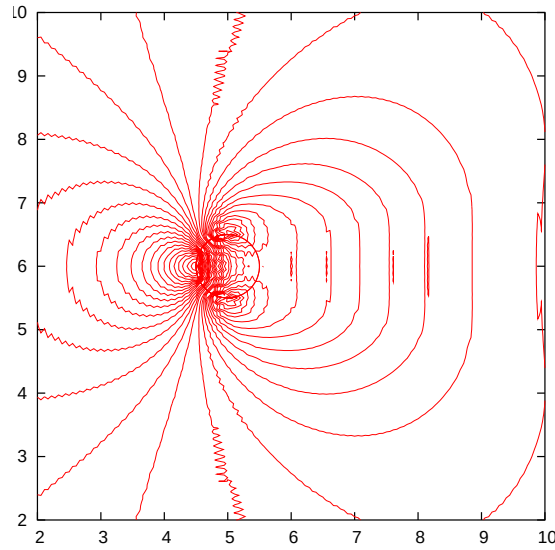


FIG. 3.6 – Isocontours du champ de pression autour d'un cylindre d'une SND à Reynolds 40 sur un maillage colocalisé.

Shih *et al.* [93] ont réalisé des études sur plusieurs types de schémas afin de déterminer les avantages et les inconvénients de chacun d'entre eux. Comme nous l'avons déjà mentionné, deux des atouts majeurs de notre code de calcul sont sa grande simplicité et son coût de calcul réduit. Or, pour chaque variable de calcul que l'on va décaler, il faudra effectuer un certain nombre d'interpolations. C'est pourquoi nous avons choisi de limiter le décalage de grille au champ de pression dans le but de ne pas diminuer de manière significative les performances du code de calcul. De plus, maintenant que nous disposons d'un code avec un solveur totalement spectral, la mise en œuvre de nouveaux opérateurs aux différences finies et spectraux pour un maillage décalé ne nécessite qu'un investissement minimal en terme de développement dans le code de calcul, le décalage de grille ne concernant que la pression c'est à dire uniquement l'équation de Poisson et l'étape de correction. Cette section présente donc ces nouveaux opérateurs utilisés pour résoudre les équations de Navier Stokes avec une grille de pression décalée.

La figure (3.7) nous montre le maillage colocalisé utilisé dans **Incompact3d** et le maillage avec uniquement le champ de pression décalé et les champs de vitesse situés sur les mêmes nœuds de grille.

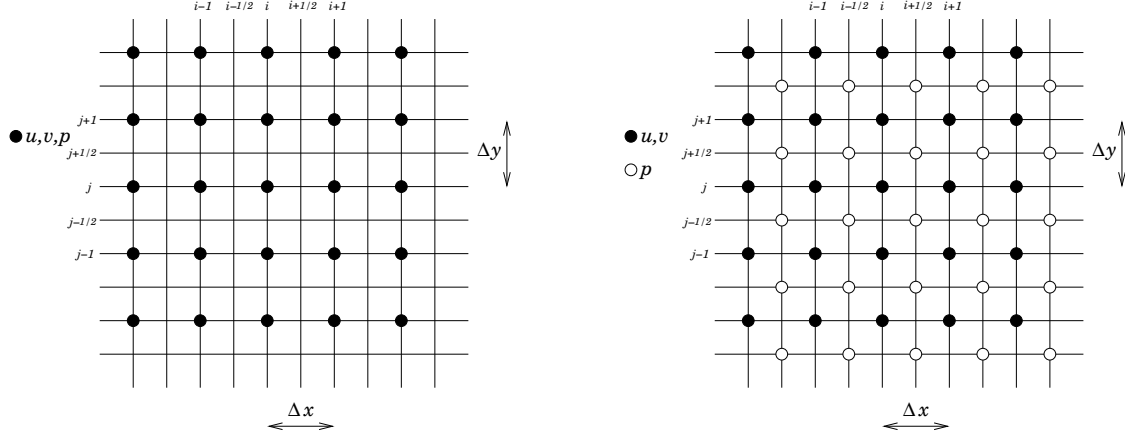


FIG. 3.7 – Schémas représentant les deux types de maillage que l'on peut rencontrer dans le code de calcul.

3.2.1 Schémas compacts sur une grille décalée

Soit deux distributions uniformes de n_x points x_i sur un intervalle $[0, L_x]$ avec

$$x_i = (i - 1)\Delta x, \quad i = 1, \dots, n_x. \quad (3.30)$$

et

$$x_{i+1/2} = (i + 1/2)\Delta x, \quad i = 0, \dots, n_x - 1. \quad (3.31)$$

On suppose que l'on connaît les valeurs f_i prises par une fonction f aux nœuds x_i et on cherche à obtenir une approximation des valeurs $f'_{i+1/2}$ prises par sa dérivée aux nœuds $x_{i+1/2}$. Pour la dérivée première, nous allons avoir une relation du type

$$\alpha f'_{i+3/2} + f'_{i+1/2} + \alpha f'_{i-1/2} = a \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + b \frac{f_{i+2} - f_{i-1}}{3\Delta x}, \quad i = 0, \dots, n_x - 1 \quad (3.32)$$

L'interpolation de la fonction f (lorsque l'on cherche à obtenir une estimation des valeurs prises par la fonction f aux nœuds $x_{i+1/2}$) se calcule de la façon suivante

$$\alpha_I f^I_{i-1/2} + f^I_{i+1/2} + \alpha_I f^I_{i+3/2} = a_I \frac{f_{i+1} + f_i}{2} + b_I \frac{f_{i+2} + f_{i-1}}{2}, \quad i = 0, \dots, n_x - 1 \quad (3.33)$$

f^I étant les valeurs de f sur les nœuds $x_{i+1/2}$.

Il n'est pas besoin de définir un opérateur de dérivée seconde sur un maillage décalé. Le décalage de grille ne concerne en effet que le champ de pression. Les opérateurs que nous définissons ici ne sont utilisés que pour la résolution de l'équation de Poisson et pour

l'étape de correction. Pour résoudre l'équation de Poisson, on utilise une dérivée première itérée.

Comme pour les opérateurs sur un maillage collocalisé il est possible d'écrire les équations (3.32) et (3.33) sous forme matricielle

$$\mathbf{C}_x \mathbf{f}' = \frac{1}{\Delta x} \mathbf{D}_x \mathbf{f} \quad (3.34)$$

$$\mathbf{C}_x^{\mathbf{I}} \mathbf{f}^{\mathbf{I}} = \mathbf{D}_x^{\mathbf{I}} \mathbf{f} \quad (3.35)$$

Les matrices pour les opérateurs de différences finies décalés pour chaque type de conditions aux limites sont données en annexe A.

3.2.2 Modification du solveur de Poisson

Le décalage de la grille de calcul ne concerne que les nœuds de pression. Pour calculer la pression, on intègre deux fois le second membre de l'équation (2.29) définie sur les nœuds $x_{i+1/2}$. Il a fallu donc utiliser de nouvelles transformées de Fourier rapides et modifier le solveur de Poisson de manière à tenir compte du décalage de la grille.

Nous allons donc dans un premier temps définir les opérateurs de transformées de Fourier sur un maillage décalé, puis nous détaillerons la mise en œuvre d'une transformée de Fourier rapide sur un maillage décalé (*TFRD*) utilisant les *TFR* sans faire d'interpolations.

La transformée de Fourier discrète pour une fonction périodique sur un maillage décalé

Soit une distribution uniforme de n_x points $x_{i+1/2}$ sur un intervalle $[0, L_x]$ avec

$$x_{i+1/2} = (i + 1/2)\Delta x, \quad i = 0, \dots, n_x - 1. \quad (3.36)$$

Dans le cas d'une fonction f périodique sur le domaine $[0, L_x]$, vérifiant $f(x + L_x) = f(x)$, la transformée de Fourier discrète peut être définie par

$$\hat{f}_l = \frac{1}{n_x} \sum_{i=1}^{n_x} f_{i+1/2} e^{-\iota k_x x_{i+1/2}} \quad (3.37)$$

avec son expression inverse

$$f_{i+1/2} = \sum_{l=-n_x/2}^{n_x/2-1} \hat{f}_l e^{\iota k_x x_{i+1/2}} \quad (3.38)$$

où $\iota = \sqrt{-1}$ et $k_x = 2\pi l/L_x$.

La transformée de Fourier discrète pour une fonction semi-périodique

Dans le cas d'une f vérifiant $f(x) = f(-x)$ et $f(x + L_x) = f(L_x - x)$ pour $x \in [0, L_x]$, la transformée de Fourier discrète en cosinus est définie par

$$\hat{f}_l = \frac{1}{n_x} \sum_{i=1}^{n_x} f_{i+1/2} \cos(k_x x_{i+1/2}) \quad (3.39)$$

avec son expression inverse

$$f_{i+1/2} = \frac{\hat{f}_0}{2} + \sum_{l=1}^{n_x-1} \hat{f}_l \cos(k_x x_{i+1/2}) - \frac{\hat{f}_{n_x}}{2} \quad (3.40)$$

où $k_x = \pi l / L_x$ est le nombre d'onde.

Pour effectuer ces transformations numériquement, nous avons mis au point une méthode qui utilise les *TFR*, définies par Cooley et Tukey [26]. Il existe dans la littérature plusieurs auteurs qui ont développés des méthodes de ce genre (Wilhemson et Ericksen [101] ou encore Swarztrauber [97]). La mise en œuvre de la transformée de Fourier rapide décalée (*TFRD*) utilisée dans **Incompact3d** est présentée dans l'annexe B.

Equivalence entre les opérateurs aux différences finies et spectraux

Comme pour les opérateurs aux différences finies sur un maillage homogène, il est assez facile de définir le nombre d'onde associé à la dérivée première donnée par la relation (3.32), obtenue à l'aide d'un schéma Hermitien d'ordre 6

$$k'_x \Delta x = \frac{2a \sin(k_x \Delta x / 2) + (2b/3) \sin(3k_x \Delta x / 2)}{1 + 2\alpha \cos(k_x \Delta x)} \quad (3.41)$$

où les coefficients (α, a, b) sont donnés dans l'annexe A.

De la même façon, la relation entre les coefficients $\hat{f}_l^I$ associés au schéma d'interpolation (3.33) et les coefficients de Fourier $\hat{f}_l$ peut être facilement établi avec

$$\hat{f}_l^I = T_x(k_x \Delta x) \hat{f}_l \quad (3.42)$$

où $T_x(k_x \Delta x)$ est la fonction de transfert associé au nombre d'onde k_x par la relation

$$T_x(k_x \Delta x) = \frac{2a^I \cos(k_x \Delta x / 2) + (2b^I/3) \cos(3k_x \Delta x / 2)}{1 + 2\alpha^I \cos(k_x \Delta x)} \quad (3.43)$$

où les coefficients (α^I, a^I, b^I) sont donnés dans l'annexe A.

La figure (3.8) présente les allures des nombres d'ondes modifiés obtenus pour différents schémas de la famille de schémas collocalisés et décalés. Les schémas décalés sont beaucoup plus précis sur une plus large gamme de longueur d'onde que les schémas collocalisés. De plus, que ce soit pour les schémas collocalisés ou décalés, il y a une grosse différence de

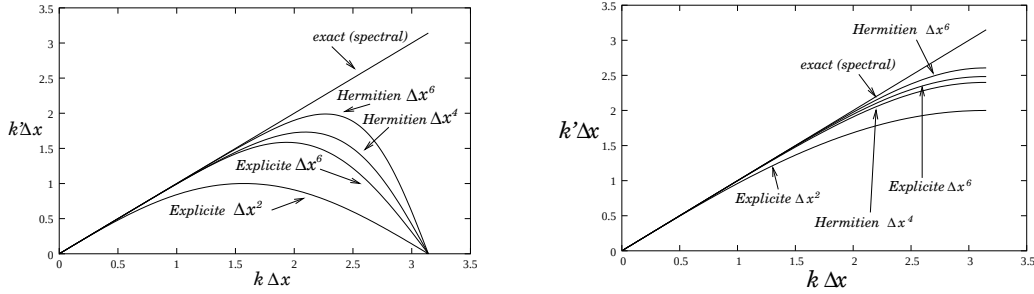


FIG. 3.8 – Représentation du nombre d'onde modifié k' en fonction du nombre d'onde k pour divers schémas centrés sur un maillage décalé. Gauche : Schémas collocalisés; droite : Schémas décalés

comportement des schémas dans la gamme de nombres d'onde $k\Delta x \in [\pi/4, \pi]$, correspondant à un intervalle de longueur d'onde $[8\Delta x, 2\Delta x]$. A noter que la plus petite longueur d'onde $2\Delta x$ correspond au nombre d'onde de coupure $k_c = \pi/\Delta x$ au delà duquel aucune harmonique ne peut être prise correctement en compte. Les schémas Hermiteiens sont bien plus précis que les schémas explicites pour une plus grande gamme de nombres d'onde. Une étude complète des propriétés des schémas compacts a été faite par Lele [62].

Synthèse

Sur un maillage collocalisé, la résolution de l'équation de Poisson consiste en une simple division pour chaque mode de Fourier $\hat{\mathbf{D}}_{lmn}$ par un facteur F_{lmn} avec

$$\hat{p}_{lmn}^{n+1} = \frac{\hat{\mathbf{D}}_{lmn}}{F_{lmn}} \quad (3.44)$$

L'expression de ce facteur est donné par

$$F_{lmn} = -(k_x'^2 + k_y'^2 + k_z'^2)c_k\Delta t \quad (3.45)$$

où (k'_x, k'_y, k'_z) sont les nombres modifiés dans chacune des directions de l'espace pour des schémas collocalisés.

Dans la configuration où le champ de pression est décalé, la pression est calculée sur les nœuds en $(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}, z_{k+1/2})$. De même, la condition de divergence nulle est vérifiée sur ces mêmes nœuds intermédiaires. Lorsque l'on calcule la pression, il y a d'une part une double intégration à réaliser et d'autre part des interpolations dans chaque direction spatiale pour obtenir le champ de pression sur les nœuds intermédiaires. Nous avons vu que pour calculer une intégration, il fallait utiliser le nombre d'onde modifié pour avoir l'équivalence, et pour une interpolation, il fallait utiliser la fonction de transfert.

Incompact3d	Dirich. x	Dirich. y	Dirich. z	Pério. x	Pério. y	Pério. z
<i>Ancienne version</i>	oui	non	non	oui	oui	oui
<i>Nouvelle version</i>	oui	oui	oui	oui	oui	oui
Incompact3d	Gliss. x	Gliss. y	Gliss. z	Inhomo. x	Inhomo. y	Inhomo. z
<i>Ancienne version</i>	non	non	oui	non	non	non
<i>Nouvelle version</i>	oui	oui	oui	non	non	non
Incompact3d	Décal. x	Décal. y	Décal. z	Coût résolution Poisson		
<i>Ancienne version</i>	non	non	non	30% avec Dirich., 10% sinon		
<i>Nouvelle version</i>	oui	oui	oui	10% tout le temps		

TAB. 3.3 – Comparaison entre les possibilités du nouveau code **Incompact3d** avec la version antérieure pour des simulations tridimensionnelles avec la mise en œuvre des schémas décalés.

Le facteur F doit donc tenir compte des interpolations à travers la fonction de transfert (3.43) et prend la forme suivante

$$F_{lmn} = - \left[(k'_x T_y T_z)^2 + (k'_y T_x T_z)^2 + (k'_z T_x T_y)^2 \right] \Delta t \quad (3.46)$$

où T_x, T_y, T_z sont les fonctions de transferts dans chacune des directions de l'espace et (k'_x, k'_y, k'_z) sont les nombres modifiés dans chacune des directions de l'espace pour des schémas décalés.

Comme on peut le voir, notre solveur de Poisson pour un maillage décalé pour la pression conserve toute sa simplicité puisqu'il faut toujours effectuer une simple division pour obtenir le champ de pression. Le formalisme de ce solveur est toujours le même que sur un maillage collocalisé. Comme le montre le tableau (3.3), le temps de calcul passé pour la résolution de cette équation est toujours inférieur à 10% du temps de calcul total sur supercalculateur. De plus, on remarque que toutes les combinaisons de conditions aux limites sont envisageables que ce soit avec un maillage collocalisé ou avec un maillage décalé.

3.3 Discrétisation sur un maillage inhomogène

Le passage sur un maillage inhomogène est assez simple à réaliser pour un code aux différences finies traditionnel. Mais la particularité de **Incompact3d** est que l'équation est résolue dans l'espace spectral. La difficulté consiste donc à résoudre l'équation de Poisson sur un maillage inhomogène et surtout à rechercher à avoir une parfaite équivalence entre les opérateurs aux différences finies et les opérateurs spectraux.

La méthode consiste à introduire un nouveau système de coordonnées et de ce fait une fonction pour relier la coordonnée physique et cette nouvelle coordonnée. Nous avons avoir un domaine de calcul avec une distribution uniforme des points de grille et un domaine physique avec un maillage inhomogène. C'est un principe couramment utilisé en

différences finies mais peu utilisé en spectral (Cain et al.[18] , Avital *et al.* [4], Flores [36], Yanase *et al.* [105]).

Pour expliciter cette méthode, nous allons prendre x comme variable physique et s pour la variable de l'espace de calcul. On utilisera toujours la transformation :

$$x = h(s) \quad (3.47)$$

dans laquelle les points de grille s_j sur la coordonnée s sont uniformément distribués et h sera appelée la fonction de raffinement.

3.3.1 La dérivée première

La relation pour la dérivée première entre les deux systèmes de coordonnées est :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial s} \frac{ds}{dx} \quad (3.48)$$

En posant

$$\frac{1}{h'} = \frac{ds}{dx} \quad (3.49)$$

on a la relation suivante

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{h'} \frac{\partial f}{\partial s} \quad (3.50)$$

Les valeurs de la dérivée première de la fonction f dans l'espace de calcul à l'aide des schémas Hermitiens d'ordre 6 sont obtenues sur un maillage homogène par la relation

$$\alpha \frac{\partial f}{\partial s} \Big|_{i-1} + \frac{\partial f}{\partial s} \Big|_i + \alpha \frac{\partial f}{\partial s} \Big|_{i+1} = a \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{\Delta s} + b \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{\Delta s} \quad (3.51)$$

soit, en utilisant la relation (3.50),

$$\alpha h'_{i-1} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{i-1} + h'_i \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i + \alpha h'_{i+1} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{i+1} = a \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{\Delta s} + b \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{\Delta s} \quad (3.52)$$

avec $h'_i = \frac{\partial h}{\partial s}(s_i)$.

Il est donc possible de calculer directement les valeurs pour la dérivée première f' de la fonction f dans l'espace physique en résolvant le système suivant

$$\mathbf{A}_{\mathbf{x}1} \mathbf{f}' = \frac{1}{\Delta s} \mathbf{B}_{\mathbf{x}} \mathbf{f} \quad (3.53)$$

La matrice $\mathbf{A}_{\mathbf{x}1}$ est telle que l'on a la relation suivante

$$a_{1i,j} = h'_j a_{i,j} \quad (3.54)$$

avec $\mathbf{A}_x$ et $\mathbf{B}_x$ qui sont les matrices de dérivée première définie à la partie (2.5).

Un raisonnement analogue conduit, avec une grille décalée, à

$$\mathbf{C}_{x1}\mathbf{f}' = \frac{1}{\Delta_s}\mathbf{D}_x\mathbf{f} \quad (3.55)$$

La matrice $\mathbf{C}_{x1}$ est telle que l'on a la relation suivante

$$c_{1i,j} = h'_j c_{i,j} \quad (3.56)$$

avec $\mathbf{C}_x$ et $\mathbf{D}_x$ qui sont les matrices de dérivée première définie dans l'annexe B.

3.3.2 La dérivée seconde

Pour le calcul des termes visqueux, on a besoin de définir un opérateur pour la dérivée seconde. L'expression de cet opérateur suivant x se développe comme suit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \left(\frac{ds}{dx} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{d^2 s}{dx^2} \quad (3.57)$$

soit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{h'^2} \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} - \frac{h''}{h'^3} \frac{\partial f}{\partial s} \quad (3.58)$$

Comme on peut le voir, le calcul de la dérivée seconde fait intervenir l'opérateur de calcul de la dérivée première, mais sa mise en œuvre reste assez simple. On voit donc que cette méthode ne nécessite pas de développements majeurs dans le code de calcul pour les opérateurs aux différences finies.

3.3.3 Choix de la fonction de raffinement

Pour obtenir $\partial f / \partial x$, il faut multiplier $\partial f / \partial s$ par $1/h'$ conformément à la relation (3.50). En effectuant cette multiplication soit par différences finies soit dans l'espace spectral, des phénomènes parasites apparaissent pour les petites échelles qui ne peuvent être prise en compte de façon satisfaisante à cause d'une trop petite longueur d'onde (Canuto *et al.* [19]). Il existe cependant un moyen qui permet de diminuer au maximum ces erreurs d'«aliasing».

Si f est périodique, on peut l'exprimer en fonction de s sous la forme

$$f(s) = \sum_{l=-\frac{n_x}{2}}^{\frac{n_x}{2}-1} \hat{f}_l e^{i k_x s} \quad (3.59)$$

De la même façon, $1/h'$ peut être aussi représentée sous la forme d'une série de Fourier

$$\frac{1}{h'(s)} = \sum_{l=-\frac{n_x}{2}}^{\frac{n_x}{2}-1} \hat{a}_l e^{i k_x s} \quad (3.60)$$

Chaque série de Fourier comporte n_x termes. Si on multiplie la série de Fourier précédente à celle représentant $\partial f / \partial s$, le résultat comportera $2n_x - 1$ coefficients alors qu'on doit en avoir seulement n_x . Si on arrive à trouver une fonction qui s'exprime sur un nombre réduit de coefficients de Fourier alors les erreurs de troncature seront les plus faibles possibles. L'idée est d'écrire $1/h'$ avec le plus faible nombre de coefficients de Fourier possible, sous la forme suivante

$$\frac{1}{h'(s)} = \sum_{l=-m}^m \hat{a}_l e^{\iota k_x s}, \quad m \ll \frac{n_x}{2} \quad (3.61)$$

De cette façon, en prenant un m très petit nous allons avoir $n_x + 2m - 1$ coefficients et les erreurs de troncatures pour n'en avoir plus que n_x seront les plus faibles possibles. La fonction de raffinement a donc été choisie sur un critère de compacité dans l'espace spectral (c'est à dire de telle sorte que la fonction s'écrit sous la forme d'une série de Fourier avec un nombre de coefficients très faible) de manière à minimiser les erreurs d'«aliasing».

Dans la littérature, il existe plusieurs fonctions reliant x et s , sachant que ces fonctions pour les transformations de Fourier doivent avoir les mêmes propriétés que les fonctions que l'on veut étudier (périodicité ou semi-périodicité par exemple). Nous avons essayé de chercher une fonction qui permettait de raffiner le maillage au centre du domaine d'étude et d'avoir un maillage plus lâche à ces extrémités. Il existe des fonctions qui permettent de travailler en renvoyant les conditions aux limites à l'infini et d'autres qui permettent de travailler sur un domaine fermé. Nous avons essayé de prendre une fonction qui autorise le plus grand nombre de configurations d'écoulements possible. La fonction que l'on utilise dans ce travail est donnée par Avital *et al.* [4] et s'écrit sous la forme

$$\frac{ds}{dx} = \frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{\pi\beta} \sin^2(\pi s), \quad 0 \leq s \leq 1, \quad -\frac{L_x}{2} \leq x \leq \frac{L_x}{2} \quad (3.62)$$

A partir de cette relation, nous obtenons la relation suivante

$$\frac{1}{h'} = \frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{\pi\beta} \sin^2(\pi s) = \frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{2\pi\beta} \left[1 - \frac{(e^{i2\pi s} + e^{-i2\pi s})}{2} \right] \quad (3.63)$$

Par identification avec l'équation (3.61), on en déduit que $m = 1$ et que les coefficients $\hat{a}_i$ s'écrivent

$$\hat{a}_1 = -\hat{a}_{-1} = -\frac{1}{4\pi\beta}, \quad \hat{a}_0 = \frac{1}{2\pi\beta} + \frac{\alpha}{\pi} \quad (3.64)$$

Notons que le calcul d'une dérivée ou d'une intégration spectrale sur un maillage homogène n'introduit aucun lien entre les différents coefficients spectraux

$$\hat{f}'_l = \iota k_x \hat{f}_l \quad (3.65)$$

Le coefficient $\hat{f}'_l$ ne dépend que du nombre d'onde k_x et de $\hat{f}_l$. En revanche, on voit qu'il existe lien entre les différents coefficients spectraux pour un maillage inhomogène puisque

pour calculer une dérivée ou une intégration pour un mode, il y a trois nombres d'ondes qui interviennent.

Le cas $\alpha = 0$ correspondant à la fonction utilisée par Cain *et al* [18].

$$x = h(s) = -\beta \cotan(\pi s), \quad 0 \leq s < 1, \quad -\infty \leq x < +\infty. \quad (3.66)$$

Cette fonction de raffinement permet de travailler sur des domaines de taille infinie qui sont les plus adaptés pour discrétiser des écoulements cisailés libres par exemple, avec un raffinement de grille important au centre du domaine. Dans le cas général, cette fonction est plus complexe et prend la forme

$$x = h(s) = \frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{\alpha\beta+1}\tan(\pi s)}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}\right)}{2\pi\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}\sqrt{\alpha\beta+1}} \frac{(2\alpha\beta - \cos(2\pi s) + 1)}{\left(\frac{\sin^2(\pi s)}{\beta\pi} + \frac{\alpha}{\pi}\right)} + C \quad (3.67)$$

avec

$$C = -\frac{\sqrt{\beta}\pi}{2\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha\beta+1}}, \quad 0 \leq s < \frac{1}{2} \quad (3.68)$$

$$C = \frac{\sqrt{\beta}\pi}{2\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha\beta+1}}, \quad \frac{1}{2} < s \leq 1 \quad (3.69)$$

$$h(s) = 0, \quad s = \frac{1}{2} \quad (3.70)$$

Si on décide de travailler sur un domaine fermé, il est possible de pouvoir choisir les bornes du domaine dans la direction inhomogène : nous savons que quand s vaut 0 cela correspond à la borne inférieure du domaine physique. Il suffit donc de choisir la borne inférieure de son domaine dans la direction inhomogène. Ensuite, il faut fixer une valeur de β en sachant que plus β est petit, plus le maillage sera raffiné au centre du maillage. La formule qui permet de déterminer α est déduite de (3.67) et s'écrit

$$\alpha = \left| \frac{\frac{L_x}{2} + \sqrt{\pi^2\beta^2 + \frac{L_x}{2}^2}}{\beta L_x} \right| \quad (3.71)$$

Cette méthode permet de choisir avec exactitude les bornes de son domaine physique et le coefficient de stretching. Il est aussi possible de construire un maillage quasiment homogène en choisissant un jeu de coefficients adaptés pour un nombre de points et une taille de domaine donnés.

Par ailleurs, si on fait tendre α vers 0 alors le domaine tend vers l'infini et on retrouve les résultats de Cain *et al.* [18]. Les figures (3.9) et (3.10) montrent deux exemples de maillages que l'on peut générer avec la fonction de stretching (3.67).

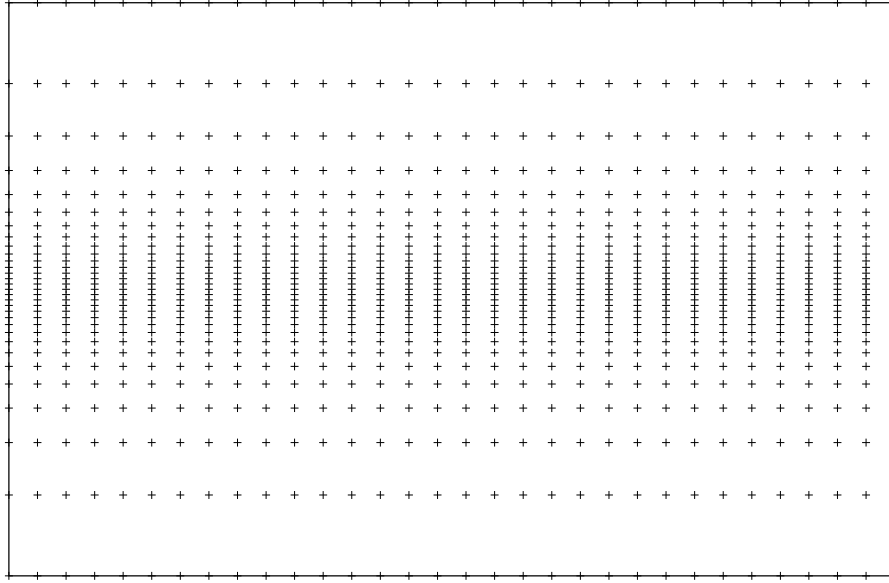


FIG. 3.9 – Illustration d'un raffinement important au centre du maillage ($\alpha = 1$ et $\beta = 0.1$) pour $n_y = 32$.

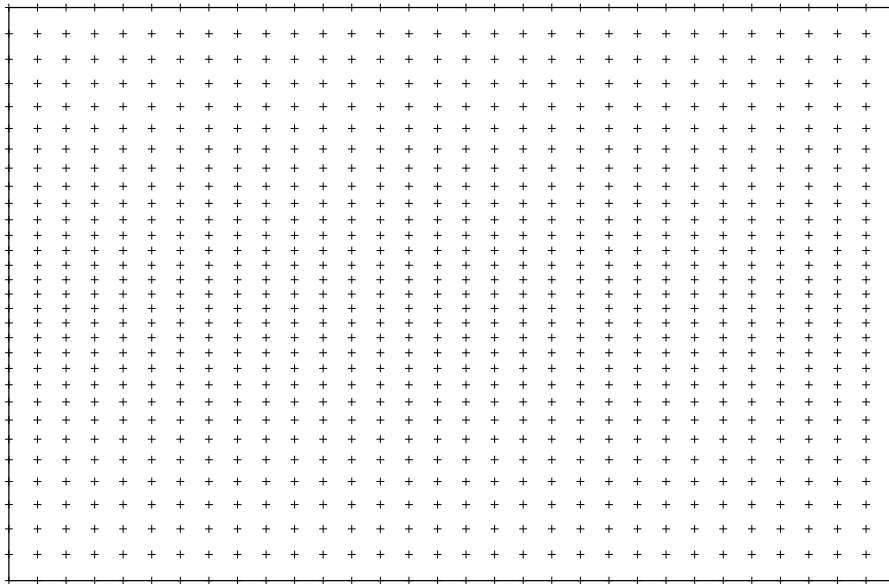


FIG. 3.10 – Illustration d'un raffinement plus lâche au centre du maillage ($\alpha = 1$ et $\beta = 1$) pour $n_y = 32$.

3.3.4 Equivalence des opérateurs pour la dérivée première

Nous avons vu que par une simple multiplication par le nombre d'onde modifié, on pouvait calculer dans l'espace spectral la dérivée première d'une fonction f obtenue à l'aide des schémas Hermitiens d'ordre 6. Nous allons voir que l'équivalence reste aussi possible sur un maillage inhomogène.

Matriciellement, pour calculer une dérivée première dans l'espace spectral, il faut réaliser l'opération

$$\hat{\mathbf{f}}' = \mathbf{A}\hat{\mathbf{f}} \quad (3.72)$$

où les termes de cette matrice $\mathbf{A}$ sont les suivants

$$a_{i,i} = \iota(\alpha + \frac{1}{2\beta}) \frac{k_x(i)}{\pi}, \quad a_{i,i+1} = -\iota \frac{k_x(i)}{4\beta\pi}, \quad a_{i,i-1} = -\iota \frac{k_x(i)}{4\beta\pi} \quad (3.73)$$

Pour effectuer une intégration, on doit inverser cette matrice. Matriciellement, l'équation à résoudre est la suivante

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{A}^{-1}\hat{\mathbf{f}}' \quad (3.74)$$

De la même façon que sur un maillage homogène, si on remplace les nombres d'ondes k_x par les nombres d'ondes modifiés k'_x , on obtient l'équivalence avec le schéma aux différences finies correspondant.

3.3.5 Modification du solveur de Poisson

La difficulté principale de cette méthode est de conserver l'équivalence entre les opérateurs aux différences finies et spectraux pour la résolution de l'équation de Poisson. Afin d'imiter parfaitement un solveur de schémas Hermitiens d'ordre 6, il nous a fallu apporter un certain nombre de modifications au solveur spectral.

Dans le cas d'un maillage cartésien régulier, pour résoudre l'équation de Poisson, il suffit d'effectuer une simple division par les nombres d'ondes modifiés. Dans le cas d'un maillage inhomogène dans une direction, il va falloir inverser une matrice à cinq diagonales.

Pour résoudre cette équation, il faut réaliser une double intégration dans l'espace spectral (équivalente à une double intégration dans l'espace physique obtenue à l'aide des schémas Hermitiens d'ordre 6). Soulignons que l'opération inverse de cette double intégration n'est pas une dérivée seconde mais une dérivée première itérée. Dans notre exemple nous avons choisi la direction y comme la direction pour le maillage inhomogène mais il va de soit que l'on peut réaliser des simulations avec un tel maillage dans n'importe quelle direction de l'espace.

Pour résoudre l'équation de Poisson dans un contexte tridimensionnelle, on peut écrire symboliquement la pression dans l'espace de Fourier sous la forme

$$\hat{p}_{lmn} = \frac{1}{n_x n_y n_z} \sum_i \sum_j \sum_k p_{ijk} W_x(-k_x x_i) W_s(-k_s y_j) W_z(-k_z z_k) \quad (3.75)$$

avec son expression inverse

$$p_{ijk} = \sum_l \sum_m \sum_n \hat{p}_{lmn} W_x(k_x x_i) W_s(k_s s_j) W_z(k_z z_k) \quad (3.76)$$

où la fonction de base W_s correspond à une *TFR* dans l'espace de calcul et k_s le nombre d'onde associé.

On va donc avoir à résoudre le système suivant

$$\hat{p}_{lmn} = \mathbf{B}_{mn}^{-1} \hat{D}_{lmn} \quad (3.77)$$

où $\mathbf{B} = \mathbf{A}^2$. Les coefficients de la matrice $\mathbf{A}$ sont donnés par (3.73). On a donc la matrice $\mathbf{B}$ à inverser pour résoudre l'équation de Poisson.

Remarque

Nous venons de définir une matrice qui permet de réaliser une double intégration dans l'espace spectral. Si on utilise cette matrice, aucune erreur d'«aliasing» n'est commise pour le calcul du champ de pression puisque dans l'espace spectral, il n'y a aucune création de mode que la grille de calcul ne peut voir.

En revanche, si on désire réaliser l'opération équivalente dans l'espace physique avec des opérateurs aux différences finies, on va retrouver ce phénomène d'aliasing. Comme on recherche à avoir l'équivalence avec les opérateurs aux différences finies pour le solveur de Poisson, il a fallu reproduire artificiellement l'erreur d'«aliasing guillemotright» en modifiant les coefficients de la matrice $\mathbf{B}$.

On peut donc dire que cette matrice a été doublement dégradée. D'une part avec le remplacement des nombres d'ondes par les nombres d'ondes modifiés et d'autre part en imitant l'erreur d'«aliasing» des schémas Hermitiens d'ordre 6. Mais il est indispensable d'effectuer ces modifications si on veut retrouver la condition de divergence nulle sur le champ de vitesse qui n'est possible qu'avec une stricte équivalence entre tous les opérateurs.

Pour une simulation tridimensionnelle sur un maillage collocalisé si on prend la direction transversale y comme direction pour le maillage inhomogène, les coefficients de la matrice $\mathbf{B}$ s'écrivent

$$b_{1,1} = -k_x'^2 - k_z'^2 \quad (3.78)$$

$$b_{j,j} = -k_x'^2 - k_z'^2 - \left(\left(\alpha + \frac{1}{2\beta} \right)^2 \frac{k_y'(j)^2}{\pi^2} + \frac{k_y'(j)k_y'(j+1) + k_y'(j)k_y'(j-1)}{16\pi^2\beta^2} \right), \quad 1 \leq j \leq n_y - 1$$

$$b_{n_y, n_y} = -k_x'^2 - k_z'^2 - \left(\left(\alpha + \frac{3}{4\beta} \right) \left(\alpha + \frac{1}{4\beta} \right) \frac{k_y'(n_y)^2}{\pi^2} + \frac{k_y'(n_y)k_y'(n_y-1)}{16\pi^2\beta^2} \right)$$

$$b_{1,2} = \frac{(\alpha + \frac{1}{4\beta})}{4\pi^2\beta} k'_y(2)k'_y(1) + \frac{(\alpha + \frac{1}{2\beta})}{4\pi^2\beta} k_y^2(2)$$

$$b_{j,j+1} = \frac{(\alpha + \frac{1}{2\beta})}{4\pi^2\beta} \left[k'_y(j+1)k'_y(j) + k_y^2(j+1) \right], \quad 2 \leq j \leq n_y - 2$$

$$b_{n_y-1,n_y} = \frac{(\alpha + \frac{3}{4\beta})}{4\pi^2\beta} k'_y(n_y)k'_y(n_y-1) + \frac{(\alpha + \frac{1}{2\beta})}{4\pi^2\beta} k_y^2(n_y)$$

$$b_{2,1} = \frac{(\alpha + \frac{1}{2\beta})}{4\pi^2\beta} k'_y(1)k'_y(2) + \frac{(\alpha + \frac{3}{4\beta})}{4\pi^2\beta} k_y^2(1)$$

$$b_{j,j-1} = \frac{(\alpha + \frac{1}{2\beta})}{4\pi^2\beta} \left[k'_y(j-1)k'_y(j) + k_y^2(j-1) \right], \quad 3 \leq j \leq n_y - 1$$

$$b_{n_y,n_y-1} = \frac{(\alpha + \frac{1}{2\beta})}{4\pi^2\beta} k'_y(n_y-1)k'_y(n_y) + \frac{(\alpha + \frac{1}{4\beta})}{4\pi^2\beta} k_y^2(n_y-1)$$

$$b_{j,j+2} = -\frac{1}{16\pi^2\beta^2} \left[k'_y(j+1)k'_y(j+2) \right]$$

$$b_{j,j-2} = -\frac{1}{16\pi^2\beta^2} \left[k'_y(j-1)k'_y(j-2) \right]$$

avec k'_x, k'_y, k'_z les nombres d'ondes modifiés.

Sur un maillage inhomogène, cette matrice est légèrement différente puisqu'il faut prendre en compte les fonctions de transferts. La matrice $\mathbf{B}$ s'écrit alors

$$b_{1,1} = -(k'_x T_y T_z)^2 - (k'_z T_y T_z)^2 \quad (3.79)$$

$$b_{j,j} = -(k'_x T_y T_z)^2 - (k'_z T_y T_z)^2 -$$

$$\left(\left(\alpha + \frac{1}{2\beta} \right)^2 \frac{T_x T_z k'_y(j)^2}{\pi^2} + \frac{T_x^2 T_z^2 (k'_y(j)k'_y(j+1) + k'_y(j)k'_y(j-1))}{16\pi^2\beta^2} \right), \quad 1 \leq j \leq n_y - 1$$

$$b_{n_y,n_y} = -(k'_x T_y T_z)^2 - (k'_z T_y T_z)^2 - \left(\left(\alpha + \frac{3}{4\beta} \right) \left(\alpha + \frac{1}{4\beta} \right) \frac{T_x T_z k'_y(n_y)^2}{\pi^2} + \frac{T_x^2 T_z^2 k'_y(n_y)k'_y(n_y-1)}{16\pi^2\beta^2} \right)$$

$$b_{1,2} = \frac{(\alpha + \frac{1}{4\beta})}{4\pi^2\beta} T_x^2 T_z^2 k'_y(2) k'_y(1) + \frac{(\alpha + \frac{1}{2\beta})}{4\pi^2\beta} T_x^2 T_z^2 k_y^2(2)$$

$$b_{j,j+1} = \frac{(\alpha + \frac{1}{2\beta})}{4\pi^2\beta} \left[T_x^2 T_z^2 (k'_y(j+1) k'_y(j) + k_y^2(j+1)) \right], \quad 2 \leq j \leq n_y - 2$$

$$b_{n_y-1,n_y} = \frac{(\alpha + \frac{3}{4\beta})}{4\pi^2\beta} T_x^2 T_z^2 k'_y(n_y) k'_y(n_y - 1) + \frac{(\alpha + \frac{1}{2\beta})}{4\pi^2\beta} T_x^2 T_z^2 k_y^2(n_y)$$

$$b_{2,1} = \frac{(\alpha + \frac{1}{2\beta})}{4\pi^2\beta} T_x^2 T_z^2 k'_y(1) k'_y(2) + \frac{(\alpha + \frac{3}{4\beta})}{4\pi^2\beta} T_x^2 T_z^2 k_y^2(1)$$

$$b_{j,j-1} = \frac{(\alpha + \frac{1}{2\beta})}{4\pi^2\beta} \left[T_x^2 T_z^2 (k'_y(j-1) k'_y(j) + k_y^2(j-1)) \right], \quad 3 \leq j \leq n_y - 1$$

$$b_{n_y,n_y-1} = \frac{(\alpha + \frac{1}{2\beta})}{4\pi^2\beta} T_x^2 T_z^2 k'_y(n_y - 1) k'_y(n_y) + \frac{(\alpha + \frac{1}{4\beta})}{4\pi^2\beta} T_x^2 T_z^2 k_y^2(n_y - 1)$$

$$b_{j,j+2} = -\frac{T_x^2 T_z^2}{16\pi^2\beta^2} \left[k'_y(j+1) k'_y(j+2) \right]$$

$$b_{j,j-2} = -\frac{T_x^2 T_z^2}{16\pi^2\beta^2} \left[k'_y(j-1) k'_y(j-2) \right]$$

avec k'_x, k'_y, k'_z les nombres d'ondes modifiés et T_x, T_y, T_z les fonctions de transferts.

L'inversion de la matrice $\mathbf{B}$ nous donne donc le champ de pression dans l'espace spectral. Cette inversion est strictement équivalente à une double intégration réalisée avec les schémas Hermitiens d'ordre 6. En terme de coût de calcul, le solveur de Poisson avec un maillage inhomogène dans une direction coûte moins de 30% du temps de calcul total sur supercalculateurs.

3.4 Synthèse

Le tableau (3.4) présente un récapitulatif des évolutions de la version du code de calcul que nous avons mis au point durant cette thèse. Par rapport à l'ancienne version il est maintenant possible

- d'utiliser les trois types de conditions aux limites dans chaque direction spatiale,

Incompact3d	Dirich. x	Dirich. y	Dirich. z	Pério. x	Pério. y	Pério. z
<i>Ancienne version</i>	oui	non	non	oui	oui	oui
<i>Nouvelle version</i>	oui	oui	oui	oui	oui	oui
Incompact3d	Gliss. x	Gliss. y	Gliss. z	Inhomo. x	Inhomo. y	Inhomo. z
<i>Ancienne version</i>	non	non	oui	non	non	non
<i>Nouvelle version</i>	oui	oui	oui	oui	oui	oui
Incompact3d	Décal. x	Décal. y	Décal. z	Coût résolution Poisson		
<i>Ancienne version</i>	non	non	non	30% avec Dirich., 10% sinon		
<i>Nouvelle version</i>	oui	oui	oui	10% en Homo., 30% en Inhomo.		

TAB. 3.4 – Comparaison entre les possibilités du nouveau code **Incompact3d** avec la version antérieure pour des simulations tridimensionnelles.

- d'utiliser un maillage décalé pour le champ de pression plus particulièrement lorsque l'on utilise la méthode de forçage direct,
- de repousser à l'infini les frontières du domaine dans une direction de l'espace,
- de raffiner le maillage au centre du domaine de calcul (économie en terme de coût de calcul et/ou meilleure prise en compte des phénomènes physiques, meilleure prise en compte des obstacles).

Il est important de souligner que tous ces développements ont été fait avec pour impératif de conserver la simplicité, la précision et la vitesse de calcul du code. Un effort particulier a été fait au niveau de la résolution de l'équation de Poisson puisque sur un maillage homogène, le temps de calcul consacré pour cette équation ne dépasse pas 10% et sur un maillage inhomogène, 30%.

Pour chaque développement du code, il a fallu effectuer un nombre important de validations à l'aide d'écoulements dont la solution analytique est connue ou à l'aide d'écoulements déjà étudiés avec la version précédente du code pour pouvoir effectuer des comparaisons qualitatives. Ces validations sont présentées dans le prochain chapitre.

Chapitre 4

Validation des développements numériques

Nous avons effectué de nombreuses modifications dans le code de calcul. Outre le changement de langage avec le passage en Fortran 90 et le changement des sous-routines pour les *TFR*, nous avons modifié en profondeur certaines parties du code. Le plus difficile dans les développements n'est pas la programmation en elle-même mais la vérification que chaque nouvelle partie du code fonctionne correctement.

La première chose que nous avons entreprise durant cette thèse est le passage du code en Fortran 90. Il existe bien des convertisseurs automatiques mais ces derniers ne nous donnant pas entière satisfaction notamment pour des raisons de lisibilité et de clarté dans le code, nous avons réalisé cette conversion nous-même avec un certain nombre de critères tels la conservation des boucles, la déclaration de chaque variable («implicite none») ou encore la vectorisation de chaque boucle (99% du code est maintenant vectorisé). Cette étape a pris un temps considérable puisque le code **Incompact3d** comporte un peu plus de 10 000 lignes mais il était nécessaire de commencer les développements à partir d'un code «propre».

Le remplacement des *TFR* dans le code n'a pas posé de difficultés majeures. En effet, les nouvelles transformées étaient beaucoup plus simples et plus fonctionnelles que les anciennes. C'est pourquoi nous n'avons eu qu'à effectuer un nombre réduit de tests avec des fonctions trigonométriques pour des opérations simples comme la dérivation. Par exemple, si on se donne une fonction périodique et que l'on calcule sa dérivée spectralement, on doit obligatoirement retomber sur la valeur exacte de la dérivée.

En ce qui concerne les opérateurs aux différences finies décalés (sous-routines de dérivation et d'interpolation), il a été assez simple de les valider en effectuant des tests de convergence pour des fonctions trigonométriques assez simples. Il a aussi été possible de valider assez facilement le solveur de Poisson toujours à l'aide de fonctions trigonométriques (respectant les conditions aux limites du problème) : on se donne une fonction que l'on intègre deux fois dans l'espace spectral grâce au solveur de Poisson et au nombre d'onde modifié puis on effectue une dérivée première itérée dans l'espace physique à l'aide des opérateurs aux différences finies équivalents, le but étant de retrouver la fonction de

départ au zéro machine près. C'est grâce à ce test que nous avons pu résoudre un grand nombre de problèmes rencontrés pendant les phases de validation du nouveau code (choix correct du nombre d'onde modifié, choix correct des fonctions de transferts, validation des transformées de Fourier collocalisées et décalées...).

Une fois ces tests effectués, nous avons soit mené des simulations d'écoulements dont la solution analytique est connue, soit nous avons cherché à reproduire des simulations d'écoulements effectués avec l'ancienne version du code. Dans ces simulations, ce qui nous a posé le plus de problème est la recherche de la divergence nulle au zéro machine pour le champ de vitesse calculé.

Dans un premier temps, nous avons étudié l'écoulement de Taylor-Green [98] et l'écoulement de cavité stationnaire de Burggraf [16] dont les solutions analytiques sont connues. Dans un deuxième temps, nous avons étudié un écoulement de couche de mélange temporelle pour valider la mise en œuvre du maillage inhomogène ainsi que pour mettre en évidence l'intérêt des schémas de haute précision pour une résolution donnée. Enfin, nous avons repris une grande partie des simulations de Parnaudeau *et al.* [80] sur l'écoulement derrière un cylindre modélisé grâce à la méthode de forçage directe couplée au décalage du champ de pression.

4.1 Les tourbillons de Taylor-Green

La solution de Taylor-Green [98] pour les équations de Navier-Stokes est un très bon moyen pour tester des méthodes de résolution numériques et donc pour valider nos développements. La solution est en dimension deux sans aucune variation dans la direction z et représente une infinité de tourbillons identiques et contrarotatifs.

Soit un domaine rectangulaire $L_x \times L_y$ avec des conditions aux limites périodiques ou de type glissement libre en $x = 0$, $x = L_x$, $y = 0$ et $y = L_y$, avec les conditions initiales suivantes

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= U \sin\left(\frac{2\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{L_y}\right) \\ v(x, y, 0) &= -U \cos\left(\frac{2\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{L_y}\right) \end{aligned}$$

la solution analytique des équations de Navier-Stokes sans le terme de forçage ($\mathbf{f} = \mathbf{0}$) est donnée par

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= U \sin\left(\frac{2\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{L_y}\right) e^{-\left(\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2}\right)4\pi^2 \nu t} \\ v(x, y, t) &= -U \cos\left(\frac{2\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{L_y}\right) e^{-\left(\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2}\right)4\pi^2 \nu t} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Afin d'effectuer nos tests, la solution exacte (4.1) est comparée avec la solution obtenue avec notre code de calcul. Pour chacune de nos validations, nous avons considéré l'évolution

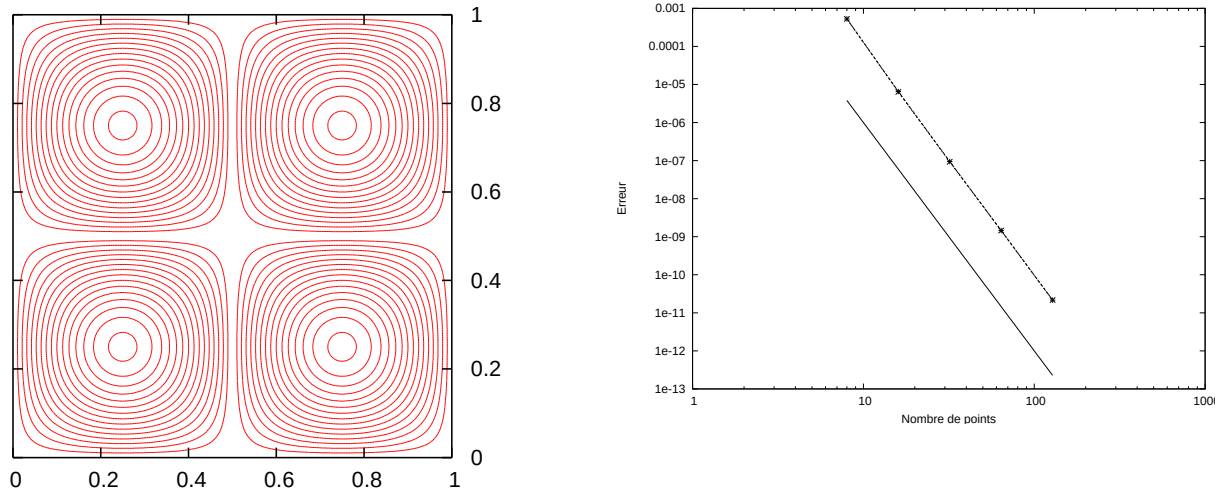


FIG. 4.1 – A gauche : Tourbillons de Taylor-Green (conditions aux limites périodiques ou de type glissement libre) représentées par les lignes de courant. A droite : Décroissance de l'erreur avec le nombre de points ($n_x = n_y$ dans chaque direction). La ligne pleine correspond à une décroissance d'ordre 6 en n_x^{-6} . Symboles : $\cdots$: Erreur calculée sur une grille collocalisée. — : Erreur calculée sur une grille décalée pour la pression. Les deux courbes se superposent. Les deux simulations ont été réalisées avec des conditions aux limites périodiques.

de l'écoulement de $t_0 = 0$ à $t_1 = 0.5$ avec un pas de temps de $\Delta t = 0.0005$. Le pas de temps est petit de façon à pouvoir négliger les erreurs d'approximation temporelle par rapport aux erreurs d'approximation spatiale. Nous avons choisi un domaine de calcul carré $L_x = L_y$ sur une grille de taille $(n_x \times n_y)$ avec $n_x = n_y$. Le nombre de Reynolds est défini par $Re = UL_x/\nu$ et vaut 1000.

Nous avons calculé, à chaque fois la différence entre la vitesse calculée u_c et la valeur analytique de cette vitesse u_a

$$\text{Erreur} = \sqrt{\frac{1}{n_x} \frac{1}{n_y} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} (u_c(x_i, y_j, t_1) - u_a(x_i, y_j, t_1))^2} \quad (4.2)$$

avec $x_i = (i - 1)L_x/n_x$ et $y_j = (j - 1)L_y/n_y$.

Pour chaque test, nous avons réalisé cinq simulations avec respectivement 8, 16, 32, 64 et 128 points dans chaque direction spatiale. Comme les simulations sont réalisées avec des schémas Hermiteiens d'ordre 6, un bon moyen de valider chaque test est donc de vérifier, en plus de la condition de divergence nulle au zéro machine, la convergence de la solution à l'ordre 6 par rapport à la solution analytique.

Nous avons réalisé un grand nombre de simulations avec cet écoulement ce qui nous a permis de

- valider les nouvelles transformées de Fourier pour des conditions aux limites de type glissement libre et/ou périodiques,

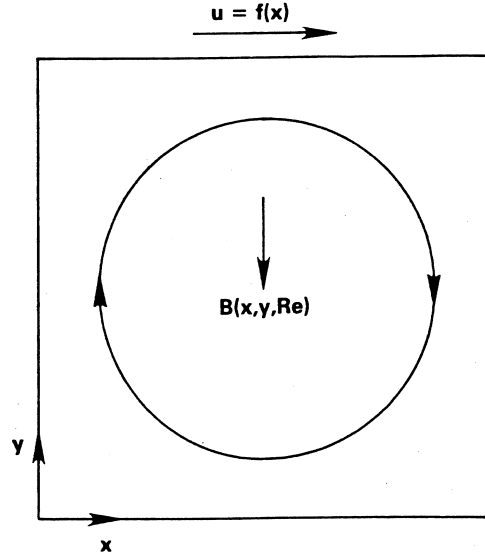


FIG. 4.2 – Configuration de l'écoulement (D'après Shih et al. [93]).

- valider le code avec les schémas décalés pour le champ de pression (tests de toutes les combinaisons possibles de conditions aux limites),
- comparer les résultats obtenus avec le code pour les schémas décalés et les schémas collocalisés avec un schéma Hermitien donné,
- effectuer des tests de comparaisons entre un schéma Hermitien à l'ordre 6 et un schéma explicite à l'ordre 2.

La figure (4.1) présente les résultats de deux tests avec des conditions aux limites périodiques pour schéma Hermitien d'ordre 6. Le premier avec une grille de pression collocalisé et le deuxième avec une grille de pression décalée. Dans les deux cas, il y a bien convergence à l'ordre 6 de l'erreur par rapport à la solution exacte. De plus, il n'y a pas de différence visible entre les valeurs de ces erreurs pour les deux tests, ce qui signifie que dans ce genre d'écoulement, le fait d'utiliser une grille décalée pour la pression n'apporte rien.

4.2 La cavité entraînée

Cet écoulement a été mis au point par Burggraf [16] puis a été repris par Shih [92], [93].

L'écoulement décrit sur la figure (4.5) correspond à la recirculation d'un écoulement stationnaire soumis à une force $\mathbf{B}$ dans une cavité carrée avec $L_x = L_y = 1$. On a donc utilisé des conditions de glissement libre dans les deux directions spatiales

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}(0, y) = \mathbf{u}(1, y) = \mathbf{0} \quad (4.3)$$

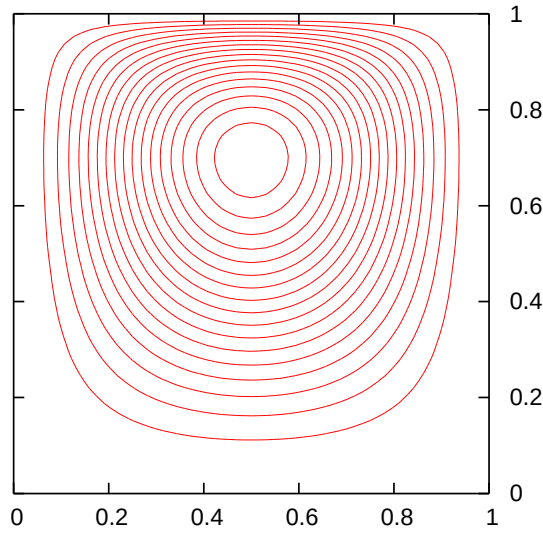


FIG. 4.3 – L'écoulement dans la cavité entraînée représenté par des lignes de courant pour $Re = 1$.

tandis que sur la limite supérieure, une condition de type Dirichlet est appliquée

$$\mathbf{u}(x, 1) = 16(x^4 - 2x^3 + x^2) \quad (4.4)$$

A noter que ce jeu de conditions aux limites a l'avantage d'éviter toutes discontinuités dans les deux coins supérieurs de la cavité. Si on utilise une force $\mathbf{f}(= \mathbf{B})$ de la forme

$$\mathbf{f} = - \left\{ \frac{8}{Re} [24g + 2g''h'' + g^{(4)}h] - 64 \left[\frac{g'^2}{2} (hh''' - h'h'') - hh'(g'g''' - g''^2) \right] \right\} \quad (4.5)$$

avec

$$g(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} \quad , \quad h(y) = y^4 - y^2 \quad (4.6)$$

dans les équations de Navier-Stokes suivantes

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p - \frac{1}{2} [\nabla (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (4.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.8)$$

alors la solution exacte s'écrit sous la forme suivante

$$\begin{aligned} u(x, y) &= 8(x^4 - 2x^3 + x^2)(4y^3 - 2y) \\ v(x, y) &= -8(4x^3 - 6x^2 + 2x)(y^4 - y^2) \end{aligned} \quad (4.9)$$

De plus, le champ de pression est connu et s'écrit

$$p(x, y, Re) = \frac{8}{Re} [gh''' + g''h'] + 32g'^2 [hh'' - h'^2] \quad (4.10)$$

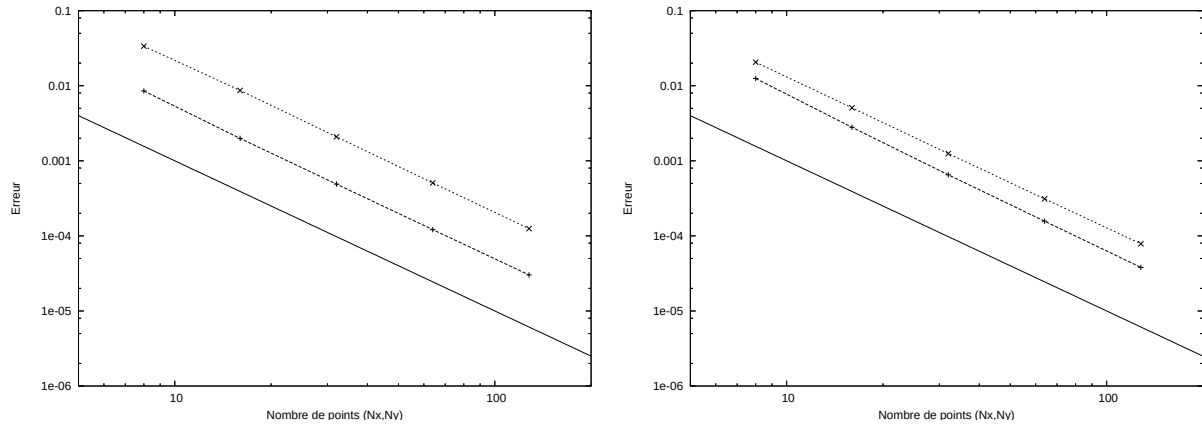


FIG. 4.4 – Evolution de l'erreur en fonction du nombre de points $n_x = n_y$ dans chaque direction. La ligne pleine correspond à une décroissance d'ordre 2 en n_x^{-2} . Symboles : $\dots$: Erreur calculée sur une grille collocalisée. $---$: Erreur calculée sur une grille décalée pour la pression. Gauche : simulation réalisée avec des schémas d'ordre 2. Droite : simulation réalisée avec des schémas d'ordre 6.

Comme pour l'écoulement de Taylor-Green, chaque test réalisé comporte cinq simulations avec respectivement 8, 16, 32, 64 et 128 points dans chaque direction spatiale, de façon à déterminer la convergence de l'erreur (4.2). Des conditions aux limites de type Dirichlet pour la vitesse sont utilisées dans chaque direction spatiale. Nous avons réalisé des simulations avec un nombre de Reynolds égal à 1 puis à 10.

Les lignes de courant pour illustrer la cavité entraînée sont tracées sur la figure (4.3). Nous présentons ici des comparaisons entre des simulations pour des schémas d'ordre 6 et pour des schémas d'ordre 2 avec des schémas décalés et collocalisés. Les résultats sont présentés sur la figure (4.4).

⇒ **Comparaison des résultats pour les schémas à l'ordre 2 :**

Avec des schémas à l'ordre 2, on observe bien une convergence de l'erreur à l'ordre 2 par rapport à la solution exacte. De plus, on peut dire que l'erreur calculée est plus faible avec des schémas décalés qu'avec des schémas collocalisés. En effet, nous avons déjà vu que pour un schéma décalé d'ordre 2, aucune hypothèse n'est faite pour le calcul de la dérivée, ce qui n'est pas le cas pour la dérivée première calculée avec un schéma collocalisé.

⇒ **Comparaison des résultats pour les schémas à l'ordre 6 :**

Avec les schémas de discrétisation à l'ordre 6 puisque avec ces schémas, nous obtenons une convergence d'ordre 2. Cette tendance était prévisible après l'étude sur l'ordre de la convergence menée dans la partie sur la mise en œuvre du solveur spectral (3.1.1). En effet, la pression est développée avec une transformée de Fourier en cosinus, et des hypothèses sont faites sur les bords du domaine afin d'assurer la pleine compatibilité entre les opérateurs aux différences finies et les opérateurs spectraux. Cette erreur se reporte logiquement sur le champ de vitesse.

⇒ **Comparaison des résultats en fonction de l'ordre des schémas :**

Nous avons vu dans la mise en œuvre du nouveau solveur pour la résolution de l'équa-

tion de Poisson que, en 1D, l'ordre 6 était plus performant que l'ordre 2 avec des schémas décalés pour une fonction dont la dérivée est nulle sur les bords du domaine. On observe la même tendance avec les schémas collocalisés pour la cavité de Burggraf [16]. En revanche, on ne retrouve pas cette conclusion avec les schémas décalés. Comme nous allons le voir par la suite, l'erreur pour les schémas décalés est dominée par un mode parasite appelé «mode damier» sur le champ de pression ce qui explique que l'erreur avec des schémas à l'ordre 2 soit plus faible. Nous aborderons ce point un peu plus tard dans cette section.

Nous avons aussi effectué les mêmes simulations mais avec un nombre de Reynolds égal à 10. Nous avons constaté les mêmes tendances que pour un nombre de Reynolds égal à 1 au niveau de l'ordre de la convergence de l'erreur et, comme Shih *et al.* [93], que la précision était légèrement meilleure pour un nombre de Reynolds égal à 1.

Enfin, en analysant le champ de pression de nos simulations, nous avons remarqué l'apparition d'un mode parasite de type «mode damier» qui dégrade le champ de pression. Shih *et al.* [93] mentionnent aussi l'apparition d'oscillations sur ce champ de pression.

L'origine du problème pour la grille collocalisée tient à deux raisons : d'une part au fait que la pression et les composantes soient choisies sur la même grille de calcul et d'autre part au fait que la pression soit définie et la condition d'incompressibilité imposée en des points de collocation situés sur la frontière du domaine de résolution [78]. C'est pourquoi la suppression de ce mode parasite ne peut se faire qu'avec des méthodes sur des grilles décalées qui reposent sur deux points essentiels : définir la pression et la contrainte de divergence nulle en des points intérieurs au domaine de calcul et diminuer le nombre de points de grille pour le champ de pression.

Plusieurs méthodes ont été testées. Il existe tout d'abord la méthode proposée par Montigny-Rannou et Morchoisne [76]. Cependant cette méthode à deux grilles ne donne pas entière satisfaction car il reste un mode parasite pour le champ de pression. Une méthode à plusieurs grilles (une pour chaque composante de vitesse plus une pour la pression) a été proposée par Bernardi et Maday [7]. Cette méthode permet l'élimination de tous les modes parasites pour le champ de pression mais elle est très lourde à mettre en œuvre en trois dimensions en raison du nombre trop important d'interpolations nécessaires pour passer d'une grille à une autre. Cependant, il existe des méthodes sur deux grilles (une pour la pression et une autre pour les composantes de la vitesse comme dans notre code de calcul) qui permettent l'élimination totale des modes parasites sur le champ de pression. Nous n'avons pas cherché à appliquer cette méthode relativement complexe dans le code de calcul parce que ce problème de modes parasites ne concernait pas la suite de nos simulations. Pour plus d'informations sur cette méthode, le lecteur pourra se référer à Patera et Maday [69, 70].

Pour conclure, on peut donc dire que grâce à ce test sur un écoulement de cavité entraînée nous avons pu valider le solveur de Poisson avec des conditions aux limites de type Dirichlet sur le champ de vitesse. Nous avons constaté une convergence pour l'erreur à l'ordre 2 quelque soit l'ordre des schémas de discrétisation, avec de meilleurs résultats pour les schémas décalés que pour les schémas collocalisés. Cette convergence s'explique par l'incompatibilité entre le jeu de conditions aux limites et les hypothèses nécessaires pour la résolution de l'équation de Poisson.

4.3 La couche de mélange temporelle

Afin de valider notre méthode de résolution des équations de Navier-Stokes avec un maillage inhomogène dans une direction, nous avons choisi d'étudier un écoulement cisailé libre fondamental, la couche de mélange temporelle bidimensionnelle. Nous n'allons pas rappeler ici les processus physique intervenant dans une couche de mélange temporelle. Pour plus d'informations, le lecteur pourra se référer à Lesieur [63, 64] ou Comte [24, 23].

4.3.1 Présentation de l'écoulement

Cette couche de mélange est composée de deux courants de vitesses (U_1 dans la partie supérieure, U_2 dans la partie inférieure). Le champ initial de vitesse moyenne est de type tangente hyperbolique

$$U(y) = \frac{U_1 + U_2}{2} + \frac{U_1 - U_2}{2} \tanh\left(\frac{2y}{\delta_\omega}\right) \quad (4.11)$$

où δ_ω est l'épaisseur de vorticité initiale. et avec $U_c = \frac{U_1 + U_2}{2}$ la vitesse de convection des tourbillons primaires.

Afin de déclencher la formation des tourbillons, nous utilisons des conditions aux limites déterministes : nous ajoutons un champ de perturbation au profil de vitesse moyenne. Ce champ de perturbation est choisi de telle sorte qu'il force l'écoulement sur son mode le plus instable de longueur d'onde λ_a et sur ses deux modes sous-harmoniques. Ceci nous permet d'engager un calcul à quatre tourbillons pour lequel le champ de perturbation à l'instant initial est de la forme

$$u(x, y) = 2 \frac{\sigma}{\delta_\omega} y e^{-\sigma(\frac{y}{\delta_\omega})^2} \left[\sin\left(\frac{8\pi x}{L_x}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{4\pi x}{L_x}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{2\pi x}{L_x}\right) \right] \quad (4.12)$$

$$v(x, y) = e^{-\sigma(\frac{y}{\delta_\omega})^2} \left[\cos\left(\frac{8\pi x}{L_x}\right) + \frac{1}{8} \cos\left(\frac{4\pi x}{L_x}\right) + \frac{1}{16} \cos\left(\frac{2\pi x}{L_x}\right) \right] \quad (4.13)$$

avec $\sigma = 0, 2$.

Caractéristiques des simulations

L'écoulement est périodique dans la direction x qui est la direction principale de l'écoulement. Le maillage est régulier dans cette direction et raffiné dans la direction y . Les dimensions du domaine sont choisies de telles sortes que le domaine soit suffisamment grand pour contenir les quatre tourbillons, à savoir $L_x = 30, 7\delta_\omega$. En fait, dans le cas d'une couche de mélange à masse volumique constante $\lambda_a = 7\delta_\omega$ ce qui donne L_x égale à $28\delta_\omega$. Mais nous avons quand même choisi un domaine un peu plus grand. Le choix pour la valeur de L_y est beaucoup plus libre. Nous avons choisi $L_y = 60\delta_\omega$. Pour l'ensemble des calculs, le nombre de Reynolds est fixé à 400.

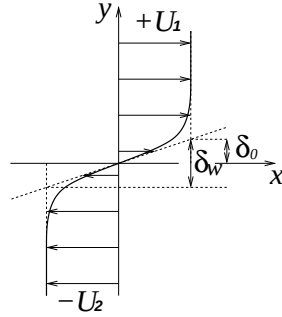


FIG. 4.5 – Configuration de l'écoulement.

Le nombre de points dans la direction x est de $n_x = 256$. Nous avons choisi de prendre cette taille de maille comme notre plus petite taille de maille dans la direction verticale de l'écoulement. Enfin, nous avons choisi de prendre un pas de temps égal à $\Delta t = 1, 25 \frac{\delta_w}{U_1 - U_2}$. Nous avons effectué plusieurs simulations avec des n_y différents. Une première simulation a été effectuée sur un maillage homogène avec $n_y = 501$. Les trois autres simulations ont été effectuées sur des maillages inhomogènes mais avec une maille au centre identique à la simulation homogène à savoir $\Delta y = 0, 12$. Les simulations ont été réalisées avec 129, 65 et 33 points avec un β imposés par la condition sur la maille au centre (4.6). Pour 129 points, nous avons $\beta = 5\delta_w$, pour 65 points nous avons $\beta = 2, 35\delta_w$ et enfin pour 33 points, nous avons $\beta = 1, 2\delta_w$. Le domaine de calcul est identique pour les quatre simulations.

Nous avons choisi de visualiser la vorticité afin de déterminer l'influence du raffinement du maillage sur la dynamique de l'écoulement. Les visualisations et les conclusions sur ces résultats sont présentés en annexe C.

4.3.2 Influence de l'ordre des schémas et de l'arrangement de la grille de pression sur l'écoulement

Paramètres des simulations

Ce type d'écoulement est idéal pour mener des simulations pour mettre en évidence l'intérêt des schémas de haute précision et du décalage de la grille de pression. Nous avons donc réalisé plusieurs *SND* d'un écoulement de couche de mélange temporelle afin de déterminer l'influence de deux paramètres : l'ordre des schémas aux différences finies utilisés et le décalage ou non du champ de pression. Les simulations de cette partie ont les mêmes caractéristiques que les simulations précédentes avec cependant un maillage régulier dans les deux directions de l'espace ($L_x \times L_y = 7\delta_w \times 28\delta_w$). Les paramètres des simulations sont présentés dans les tableaux (4.1 et 4.2).

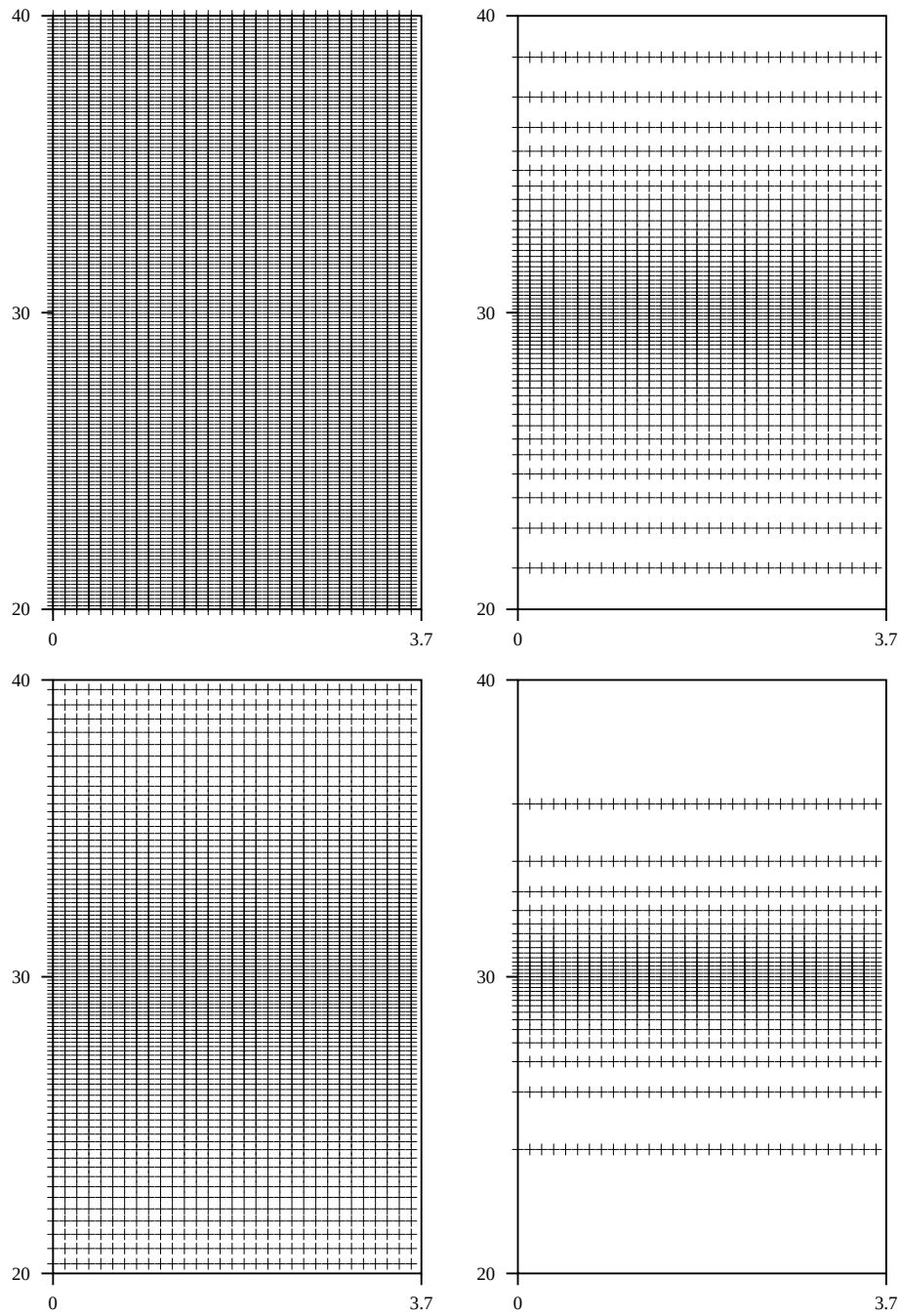


FIG. 4.6 – Illustration des différents maillage ($N_y = 501, 129, 65$ et 33 points) sur une partie de la boîte de calcul : $((0; 3, 7\delta_\omega) \times (20\delta_\omega; 40\delta_\omega))$.

Simulation	C_{ref}	$CO6_{96}$	$CO6_{48}$	$CO6_{32}$	$CO2_{96}$	$CO2_{48}$	$CO2_{32}$
Résol.	512×2048	96×384	48×192	32×128	96×384	48×192	32×128
Ordre	$\Delta\xi^6$	$\Delta\xi^6$	$\Delta\xi^6$	$\Delta\xi^6$	$\Delta\xi^2$	$\Delta\xi^2$	$\Delta\xi^2$

TAB. 4.1 – Paramètres des simulations sur un maillage collocalisé. $\Delta\xi$ représente indifféremment Δx ou Δy .

Simulation	D_{ref}	$DO6_{96}$	$DO6_{48}$	$DO6_{32}$	$DO2_{96}$	$DO2_{48}$	$DO2_{32}$
Résol.	512×2048	96×384	48×192	32×128	96×384	48×192	32×128
Ordre	$\Delta\xi^6$	$\Delta\xi^6$	$\Delta\xi^6$	$\Delta\xi^6$	$\Delta\xi^2$	$\Delta\xi^2$	$\Delta\xi^2$

TAB. 4.2 – Paramètres des simulations sur un maillage décalé. $\Delta\xi$ représente indifféremment Δx ou Δy .

Analyse des résultats

Nous avons choisi de visualiser la vorticité de l'écoulement sur un seul tourbillon afin de déterminer l'influence du décalage du champ de pression et l'ordre des schémas notamment sur la description des tourbillons.

Dans un premier temps, nous avons réalisé des simulations à très haute résolution afin de déterminer nos visualisations de référence. Puis nous avons calculé l'erreur entre la vorticité ω_c sur le maillage collocalisé et la vorticité ω_d sur le maillage décalé pour la pression.

$$\text{Erreur} = \sqrt{\frac{1}{n_x} \frac{1}{n_y} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} (\omega_c(x_i, y_j, t_1) - \omega_d(x_i, y_j, t_1))^2} \quad (4.14)$$

avec $x_i = (i - 1)L_x/n_x$, $y_j = (j - 1)L_y/n_y$ et $t_1 = 14$.

Pour déterminer les simulations de références, nous avons cherché à avoir une erreur égale au zéro machine entre la simulation sur un maillage collocalisé et la simulation sur un maillage décalé, ce que nous avons obtenu pour les simulations à $n_x \times n_y = 512 \times 2048$ points de maillage.

Dans cette section, nous avons cherché à discuter à la meilleure réponse à la question : Quelle est résolution optimale pour obtenir une description correcte du tourbillon étudié, en fonction du schéma utilisé ? Nous avons énoncé un certain nombre de principes concernant les schémas de discrétisation dans la partie (3.2.2). Pour répondre à cette question, nous nous sommes appuyé sur le champ de vorticité de l'écoulement pendant un processus d'appariement. Les visualisations de la vorticité sont présentées sur la figure (4.7). La dernière colonne montre la vorticité pour les deux simulations de référence.

⇒ **Comparaison pour les simulations à 32 points :**

Les simulations avec 32 points de grille dans la direction x ne permettent pas de décrire correctement le tourbillon. En revanche, on peut établir une sorte de hiérarchie dans la

capacité des différents schémas utilisés à reproduire le tourbillon de référence. A cette résolution, les schémas d'ordre deux donnent de très mauvais résultats, notamment dans la zone située entre les deux tourbillons, zone où la vorticité est la plus élevée. Mais on remarque que les schémas d'ordre 6 sont beaucoup plus précis, plus particulièrement le schéma décalé qui semble plus robuste que le schéma collocalisé.

⇒ **Comparaison pour les simulations à 48 points :**

Les conclusions des simulations avec 32 points se confirment avec les simulations avec 48 points de grille dans la direction x . On constate même que l'utilisation des schémas Hermitiens décalés d'ordre 6 à cette résolution est suffisante pour reproduire le tourbillon des simulations de référence. L'ordre 2 donne des résultats un peu plus précis mais pas encore convaincants.

⇒ **Comparaison pour les simulations à 96 points :**

Pour ces simulations, on n'observe presque plus aucune différence entre les quatre schémas, sauf pour le cœur du tourbillon. Pour cette résolution, l'utilisation de schémas d'ordre élevé ne semble plus se justifier. De même, la précision du maillage décalé n'est plus aussi marquée.

⇒ **Comparaison pour les simulations avec des schémas d'ordre 2 :**

Pour les résolutions étudiées, les schémas d'ordre 2 ne donnent pas satisfaction. La description du tourbillon est cependant acceptable pour les simulations avec 96 points dans la direction x . Les simulations à 32 et 48 points dans la direction x montrent clairement la différence de robustesse entre les schémas collocalisés et les schémas décalés surtout pour la description de la zone juste en amont du tourbillon, là à la vorticité est très importante.

⇒ **Comparaison pour les simulations avec des schémas d'ordre 6 :**

Pour les schémas d'ordre 6, on n'observe une différence marquante de comportement que pour la plus faible résolution. Ces visualisations nous disent aussi que l'utilisation des schémas d'ordre 6 n'est pertinente que jusqu'à une certaine résolution puisque pour les simulations avec 96 points dans la direction x , il n'y a plus de différences majeures sur la description du tourbillon.

⇒ **Synthèse générale :**

- Les schémas décalés sont plus robustes que les schémas collocalisés.
- On note une meilleure description de la dynamique tourbillonnaire avec les schémas Hermitiens d'ordre 6.
- Il est indispensable de bien maîtriser la résolution du maillage pour ne pas «passer au travers» de ces conclusions si on effectue les simulations avec un maillage surr solu par exemple.

4.4 Ecoulement derrière un cylindre

Depuis quelques années, il est possible d'utiliser une méthode de forçage direct avec **Incompact3d** pour la simulation d'écoulement autour d'un obstacle [95, 53, 96]. Plus récemment, cette méthode a été améliorée par Parnaudeau *et al.* [80] pour la simulation



FIG. 4.7 – Iso-vorticité des simulations pour un nombre de Reynolds égal à 800. Les visualisations ont été effectuée pour $\bar{t}=14$ avec $\bar{t}=2t\frac{U_1-U_2}{\delta_w}$.

d'un écoulement derrière un cylindre avec la mise en œuvre d'un écoulement interne dans le cylindre.

Il nous a semblé indispensable de refaire une grande partie de ces simulations afin de valider le nouveau code combiné avec la méthode de forçage directe améliorée et de déterminer si le décalage de la pression apporte un réel plus pour la retranscription de la dynamique tourbillonnaire. Dans un premier temps, nous avons réalisé des simulations bidimensionnelles à Reynolds 40 afin de visualiser le champ de pression sur un maillage collocalisé et sur un maillage décalé. De plus, ces simulations seront l'occasion de mettre en évidence le gain de la méthode de forçage directe avec un écoulement interne. Dans un deuxième temps, nous avons réalisé plusieurs *SND* d'un écoulement derrière un cylindre avec un nombre de Reynolds égal à 300 avec une grille de pression décalée. Pour cet écoulement nous effectuerons une analyse quantitative et qualitative de nos résultats. Nous effectuerons une analyse statistique de certaines grandeurs fluctuantes de l'écoulement que nous comparerons aux données obtenues par Mittal et Balachandar [74]. Ces auteurs ont réalisé une *SND* de cet écoulement mais entièrement avec des méthodes spectrales.

Etudier à nouveau cet écoulement est donc assez important. Tout d'abord, pour retrouver les conclusions de Parnaudeau *et al.* [80] et ensuite pour déterminer si le décalage de la grille de pression a un effet bénéfique sur le comportement du champ de pression.

Cet écoulement a fait l'objet de nombreuses études expérimentales et numériques. Zdravkovich [106], ou encore Mittal et Balachandar [73, 74] ont réalisé des travaux détaillés sur cet écoulement. Pour plus d'informations sur la mise en œuvre de l'écoulement miroir pour cet écoulement, le lecteur pourra se référer à Parnaudeau *et al.* [80].

4.4.1 Simulation 2D pour un sillage stationnaire à $Re = 40$

Configuration de l'écoulement

Les simulations sont réalisées sur le domaine de calcul schématisé par la figure (4.8), avec $(L_x \times L_y) = (20D \times 12D)$ et $n_x \times n_y = 361 \times 217$ avec D qui est le diamètre du cylindre. Le cylindre est situé à cinq diamètres de l'entrée du domaine dans la direction x et à six diamètres de la frontière du domaine dans la direction y . Afin de mettre en évidence les gains obtenus par l'utilisation d'un écoulement miroir et par l'utilisation d'un maillage décalé pour la grille de pression, nous avons effectué trois simulations.

- La première simulation est effectuée avec la méthode de forçage direct sans écoulement miroir, c'est à dire avec une vitesse nulle dans l'obstacle. Cette simulation spatiale est réalisée avec le solveur spectral et des schémas Hermitiens d'ordre 6 sur un maillage collocalisé. Nous noterons cette simulation *SEMC*
- La seconde simulation est effectuée avec la méthode de forçage direct avec écoulement miroir, c'est à dire avec une vitesse non nulle dans l'obstacle. Cette simulation spatiale est réalisée avec le solveur spectral et des schémas Hermitiens d'ordre 6 sur un maillage collocalisé. Nous noterons cette simulation *AEMC*
- La troisième simulation est effectuée avec la méthode de forçage direct avec écoulement miroir, c'est à dire avec une vitesse non nulle dans l'obstacle. Cette simulation

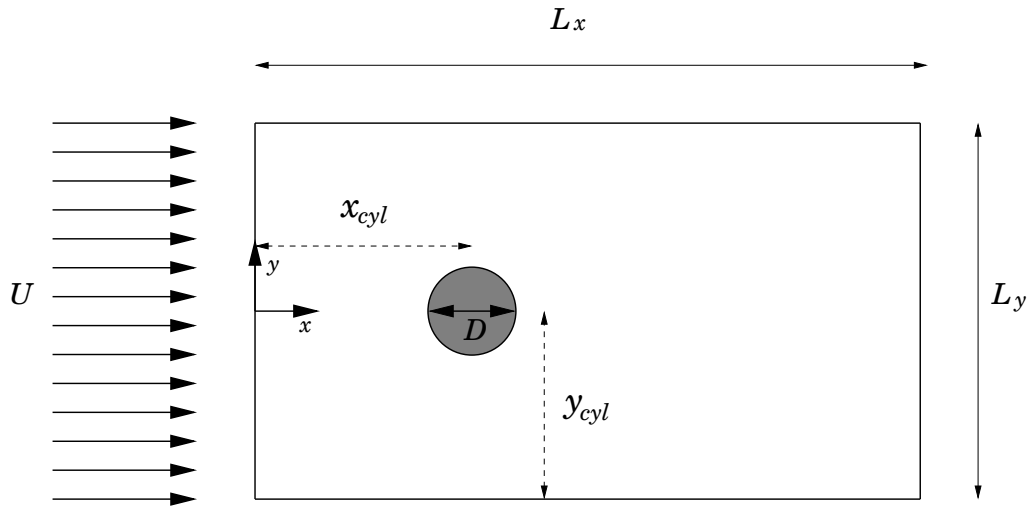


FIG. 4.8 – Vue schématique du domaine de calcul

spatiale est réalisée avec le solveur spectral et des schémas Hermiteens d'ordre 6 sur un maillage décalé pour la grille de pression. Nous noterons cette simulation *AEMD*.

Résultats

La figure (4.9) montre le gain de réalisme que présente la méthode avec un écoulement interne. En effet, on remarque la disparition de la discontinuité sur la frontière du cylindre. L'observation des iso-contours de vorticité montre clairement les bénéfices de cette méthode. D'une part, on note l'absence de discontinuité mais aussi une diminution significative des oscillations parasites. De plus, sur un plan quantitatif, nous avons trouvé pour la simulation *AEMC* et pour la simulation *AEMD* une longueur de recirculation égale à $L_r/D = 2,28$ en accord avec les données de référence. Pour la simulation sans écoulement interne (*SEMC*), on observe une surestimation de l'ordre de 10% avec une valeur égale à $L_r/D = 2,50$.

La figure (4.10) permet de mettre en évidence le net avantage d'avoir recours à une grille décalée pour le champ de pression. Comme on peut le voir, l'utilisation d'une méthode de Forçage direct combinée à des schémas Hermiteens d'ordre 6 a tendance à provoquer des oscillations sur le champ de pression qui disparaissent lorsqu'on décale le champ de pression. Nous avons aussi constaté qu'il n'y avait aucune modification sur le champ de vitesse entre les simulations *AEMC* et *AEMD*. Reste à savoir si tous ces résultats se confirment pour une simulation instationnaire à plus haut nombre de Reynolds.

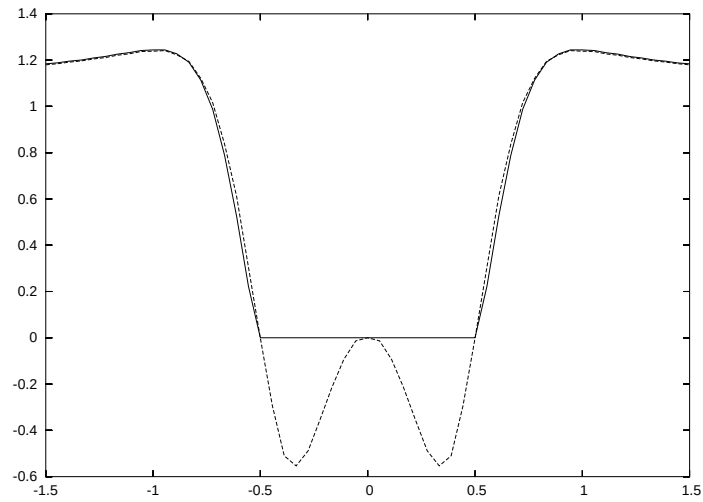


FIG. 4.9 – Profil vertical de la vitesse longitudinale u au centre du cylindre ($x_{cyl} = 5D, y$).
— : SEMC, — — : AEMC.

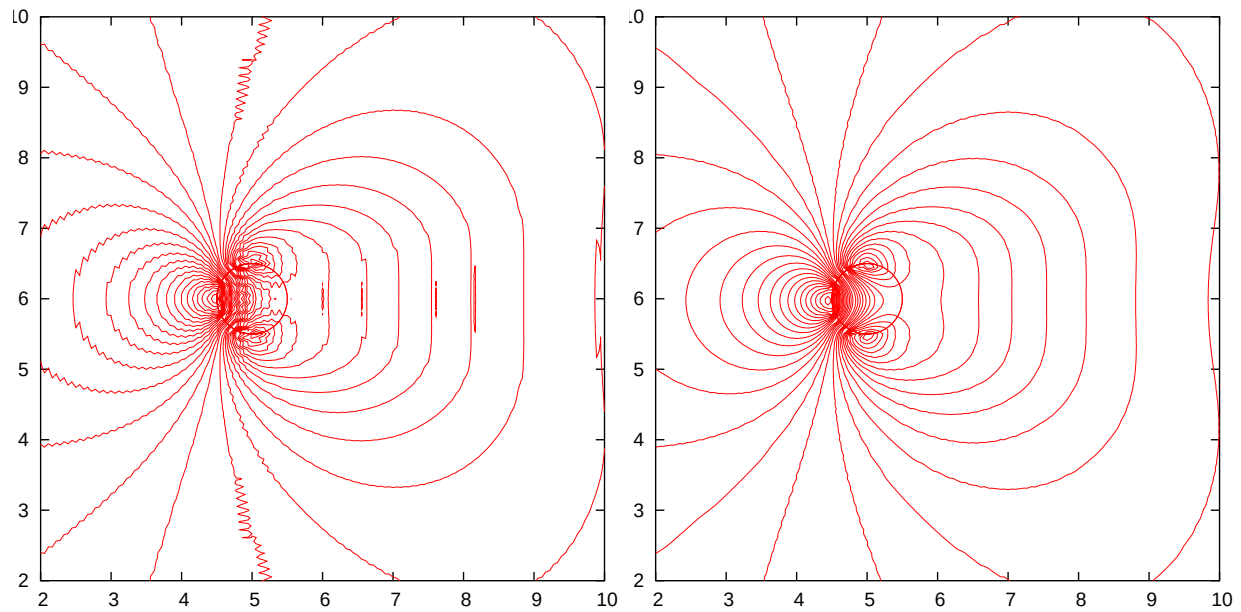


FIG. 4.10 – Isocontours du champ de pression autour du cylindre de la simulation AEMC (gauche) et de la simulation AEMD (droite).

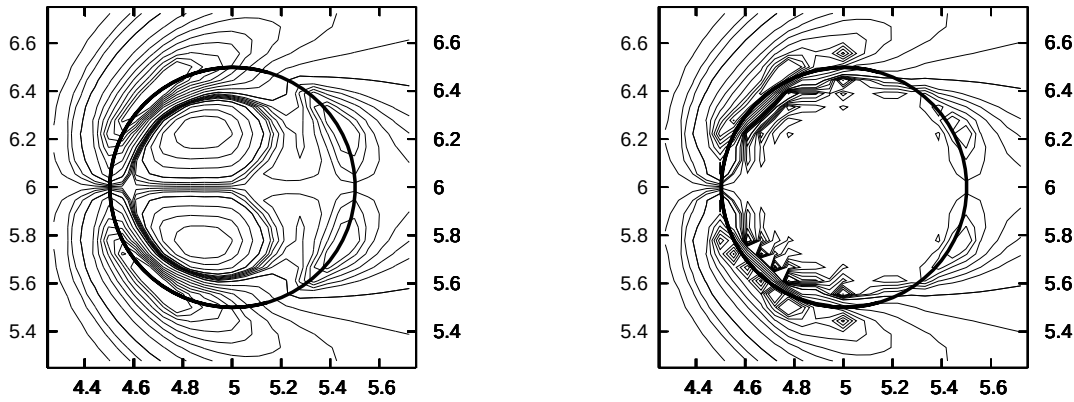


FIG. 4.11 – Champ de vorticité de la simulation AEMC (droite) et de la simulation SEMC (gauche).

4.4.2 Simulation 3D pour un sillage instationnaire à $Re = 300$

Parnaudeau *et al.* [80] ont étudié avec des *SND* d'un écoulement derrière un cylindre les avantages des schémas Hermiteiens de haute précision sur un maillage collocalisé. Dans cette étude, nous allons réaliser les mêmes simulations que ces auteurs mais avec un maillage décalé pour la pression.

Les simulations de référence seront les simulations réalisées par Parnaudeau *et al.* [80] sur un maillage collocalisé avec des schémas d'ordre 2 puis des schémas Hermiteiens d'ordre 6. Nous avons réalisé deux *SND* spatiales sur un maillage décalé pour le champ de pression en utilisant des schémas d'ordre 2 puis des schémas Hermiteiens d'ordre 6 (*SD6*). L'objectif de cette simulation est double. Il s'agit de valider le solveur spectral avec un maillage décalé combiné à la méthode de forçage modifiée et de confirmer ou d'infirmier les bénéfices des schémas de haute précision. De plus, nous avons réalisé deux simulations à très faible résolution afin d'étudier le comportement général de notre code.

Configuration de l'écoulement

Le domaine de calcul $(L_x \times L_y \times L_z) = (20D \times 12D \times 2\pi D)$ est discrétisé avec $(n_x \times n_y \times n_z) = (361 \times 217 \times 48)$. Nous noterons par la suite cette résolution R_1 . Comme pour la simulation stationnaire, le cylindre est situé à cinq diamètres de l'entrée du domaine de calcul et à six diamètres de la frontière du domaine dans la direction y . Les simulations sont réalisées avec un écoulement miroir dans le cylindre. Dans la direction z , des conditions périodiques sont imposées. Dans la direction y , nous utilisons des conditions de glissement libre. La figure 4.12 nous donne un aperçu du domaine de calcul.

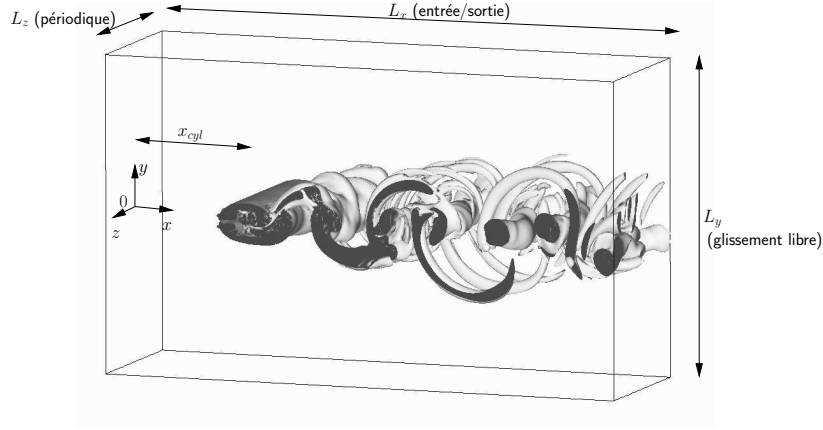


FIG. 4.12 – Vue schématique du domaine de calcul

Simulation	<i>SND I</i> (*)	<i>SND II</i> (*)	<i>SND III</i>	<i>SND IV</i>	<i>SND V</i>	<i>SND VI</i>
Forçage	Direct	Direct	Direct	Direct	Direct	Direct
Ecoulement miroir	oui	oui	oui	oui	oui	oui
Résolution	R_1	R_1	R_1	R_1	R_2	R_2
Maillage	Collocalisé	Collocalisé	Décalé	Décalé	Décalé	Décalé
Ordre des schémas	$\Delta\xi^6$	$\Delta\xi^2$	$\Delta\xi^6$	$\Delta\xi^2$	$\Delta\xi^6$	$\Delta\xi^2$

TAB. 4.3 – Paramètres des simulations. $\Delta\xi$ représente indifféremment Δx , Δy ou Δz . R_1 correspond à la résolution $(361 \times 217 \times 48)$ et R_2 correspond à la résolution $(181 \times 109 \times 24)$

(*) Simulations de référence réalisées par Parnaudeau et al. [80]

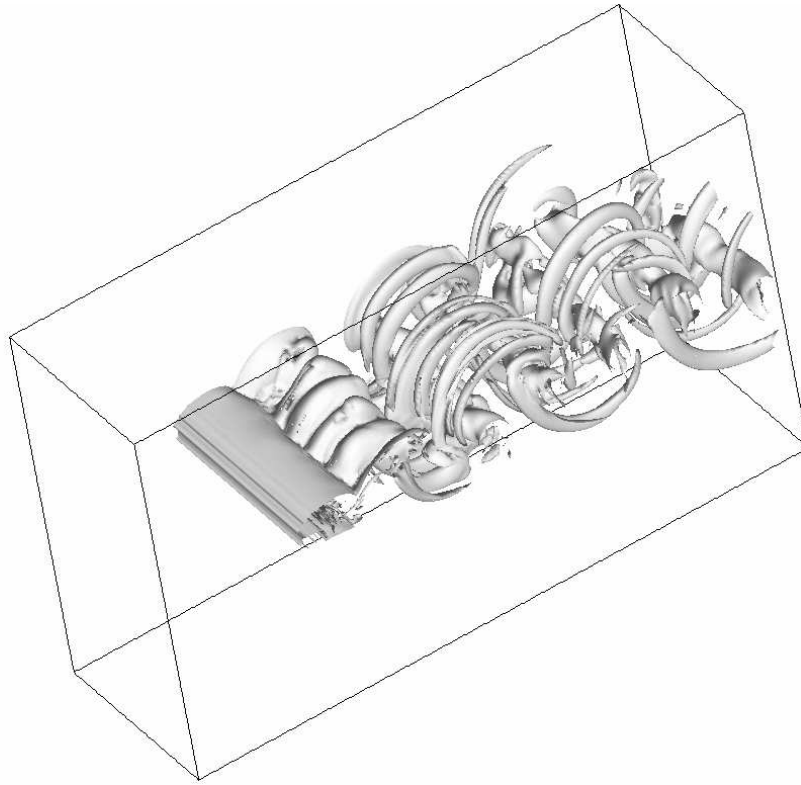


FIG. 4.13 – Iso-surfaces de la norme de vorticité $\omega_n = 1,5D/U$. Vue de perspective pour la simulations SND III.

Visualisation de la vorticité

L'écoulement derrière un cylindre pour un nombre de Reynolds égal à 300 est fortement tridimensionnel. C'est pourquoi, on retrouve des tourbillons longitudinaux et des structures tourbillonnaires fines. Ces structures sont dues à la présence d'instabilités de type mode-B mise en évidence par Mittal et Balachandar [74] et Williamson [102]. Ces différentes structures sont visibles sur la figure (4.13). On remarque que les lâchers tourbillonnaires derrière le cylindre sont bien parallèles à l'écoulement, conformément aux prédictions de Williamson [102]. Parnaudeau [79] a montré tous les bénéfices de l'utilisation d'un écoulement miroir dans le cylindre. L'écoulement de proche paroi est beaucoup plus réaliste. Il a aussi observé une meilleure description de l'écoulement proche du cylindre.

La figure 4.14 propose une comparaison entre les quatre simulations que nous avons menées sur un maillage décalé pour le champ de pression et les deux simulations de références de Parnaudeau *et al.* [80]. Ces auteurs avaient montré que la physique de l'écoulement était mieux décrite à la résolution R_1 avec des schémas hermitiens d'ordre 6 et que les schémas d'ordre 2 inhibaient les effets tridimensionnels de l'écoulement avec notamment des tourbillons beaucoup plus réguliers. En effet, on remarque que dans la

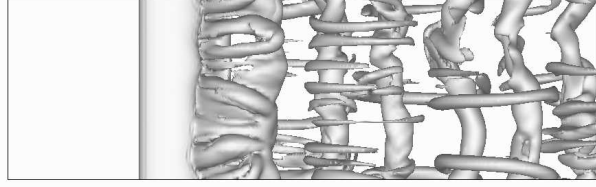
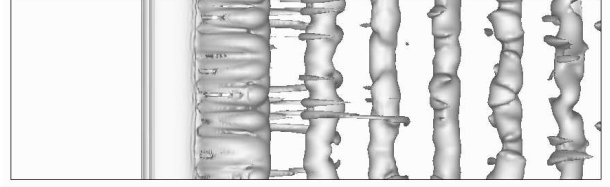
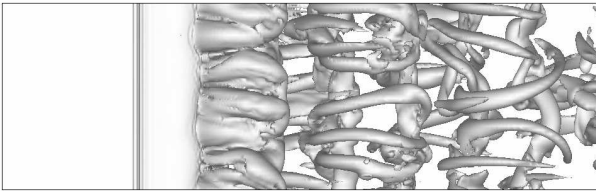
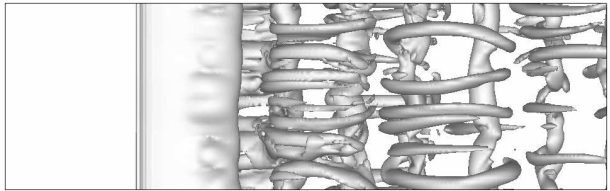
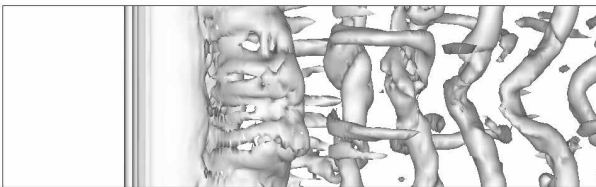
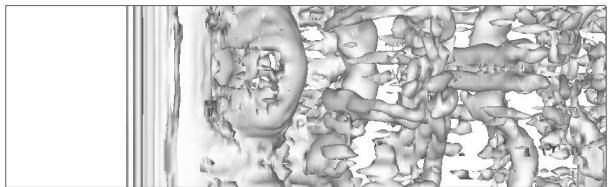
a) *SND I*b) *SND II*c) *SND III*d) *SND IV*e) *SND V*f) *SND VI*

FIG. 4.14 – Iso-surfaces de la norme de vorticité $\omega_n = 1,5D/U$. Vue dans le plan $x - y$. Les visualisations de la colonne de gauche sont les simulations réalisées avec les schémas d'ordre 6 et celles de droite sont réalisées avec les schémas d'ordre 2.

simulation *SND I*, il y a une grande diversité dans la nature des structures tourbillonnaires, et la présence importante de tourbillons longitudinaux qui sont visibles toujours loin de l'obstacle. En revanche, pour la simulation *SND II*, pour le même niveau de vorticité, on observe une grande régularité dans la forme des tourbillons et une absence presque complète de tourbillons longitudinaux.

Les simulations *SND III* et *SND IV* réalisées avec un maillage décalé pour le champ de pression pour la même résolution R_1 infirment ces conclusions. En effet, pour ces deux simulations, les différences entre les deux types de schémas sont bien moins flagrantes que chez Parnaudeau *et al.* [80]. Dans les deux cas, on observe une grande diversité de taille et de forme des structures tourbillonnaires et on peut dire que l'écoulement est parfaitement tridimensionnel même avec les schémas d'ordre 2. On peut donc dire que pour cette résolution l'utilisation de schémas décalés d'ordre élevé n'est pas justifiée. Nous avons déjà vu que pour un ordre donné, les schémas décalés sont plus précis que les schémas collocalisés. C'est pourquoi à la résolution R_1 , nous n'observons pas de gains significatifs avec les schémas Hermitiens d'ordre 6.

Pour retrouver une différence de comportement entre les schémas, il faut diminuer la résolution du maillage. A la résolution R_2 (*SND V* et *SND VI*), on observe toute la puissance des schémas de haute précision. Si on effectue une comparaison entre les simulations *SND V* et *SND VI*, on remarque que des oscillations autour du barreau apparaissent avec les schémas d'ordre 2. De plus, on observe la présence de oscillations numériques liées aux erreurs de discrétisation, ce qui a pour effet de dégrader considérablement la reproduction de la physique de l'écoulement. Les résultats sont plus convaincants si on utilise les schémas décalés d'ordre 6. En effet, il n'y a presque pas d'oscillations autour du cylindre et on retrouve à peu près les phénomènes physiques observés par les simulations sur la résolution plus élevée R_1 .

Toutes ces simulations nous montrent l'intérêt des schémas de haute précision combinés à la méthode de forçage direct pour simuler des écoulements derrière des obstacles. De plus, on a pu voir que le décalage du champ de pression en plus de diminuer les oscillations sur le champ de pression, est bénéfique puisque si on compare les simulations *SND I* et *SND III*, il existe une plus grande diversité de tourbillons pour la simulation réalisée avec un maillage décalé pour la pression. Afin de confirmer ses résultats, nous avons étudié certaines grandeurs statistiques de l'écoulement et nous les avons comparés aux résultats issus de la littérature.

A noter que nous n'avons pas abordé ici l'intérêt de l'écoulement miroir. Parnaudeau *et al.* [80] ont montré tous les bénéfices de cette technique avec des schémas d'ordre élevé. En revanche, la présence d'un écoulement interne avec des schémas d'ordre 2 n'apporte rien. Les mêmes simulations avec des schémas décalés nous ont donné les mêmes résultats.

Analyse statistique des résultats

Mittal et Balachandar [74] ont réalisé une *SND* spectrale de l'écoulement considéré sur une grille cylindrique. Nous avons comparé certaines de nos grandeurs statistiques avec leurs résultats.

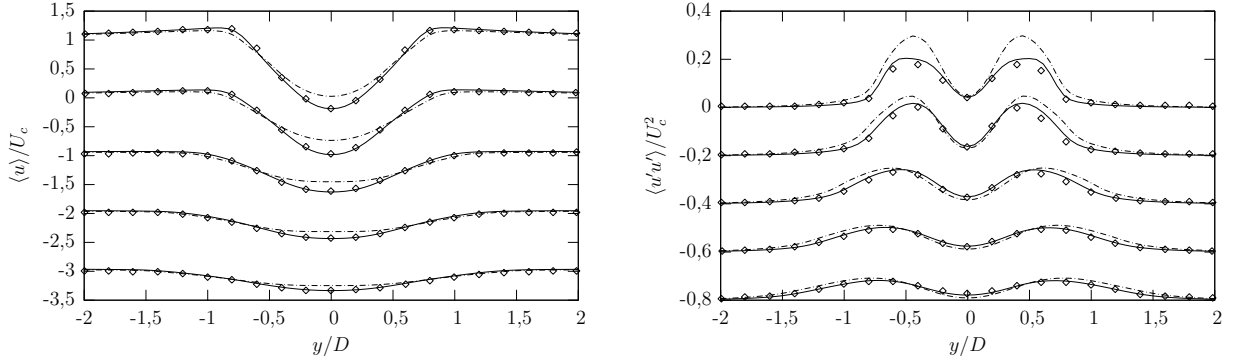


FIG. 4.15 – A gauche : Profil vertical de la composante longitudinale de la vitesse moyenne. A droite : Profil vertical des fluctuations de la composante longitudinale de la vitesse. A différentes localisations $(x - x_{cyl})/D = 1, 2; 1, 5; 2, 0; 2, 5; 3, 0$ du haut vers le bas. Symboles : — : SND I, — · — : SND II, $\diamond$ Simulation spectrale de Mittal et Balachandar [74]

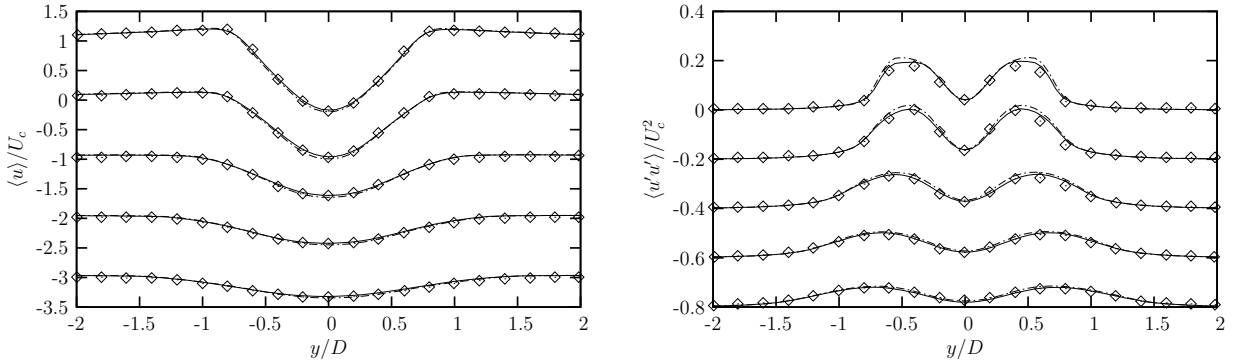


FIG. 4.16 – A gauche : Profil vertical de la composante longitudinale de la vitesse moyenne. A droite : Profil vertical des fluctuations de la composante longitudinale de la vitesse. A différentes localisations $(x - x_{cyl})/D = 1, 2; 1, 5; 2, 0; 2, 5; 3, 0$ du haut vers le bas. Symboles : — : SND III, — · — : SND IV, $\diamond$ Simulation spectrale de Mittal et Balachandar [74]

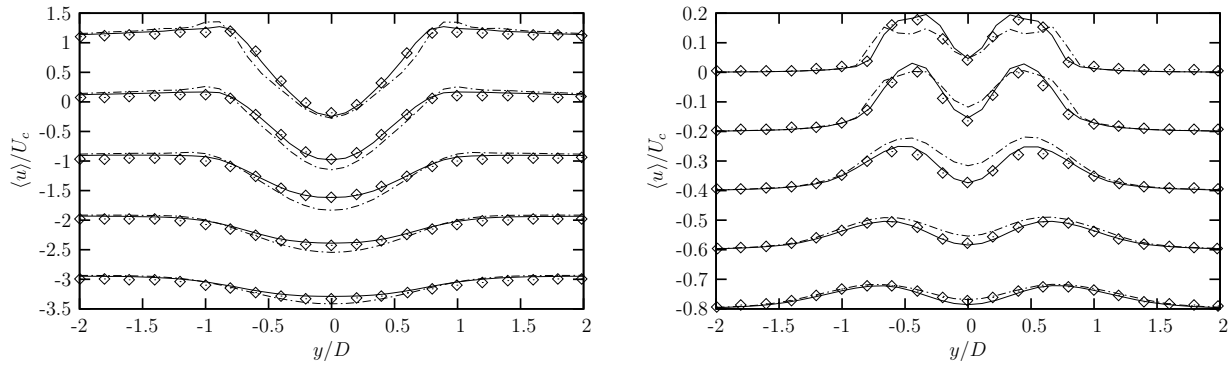


FIG. 4.17 – *A gauche : Profil vertical de la composante longitudinale de la vitesse moyenne. A droite : Profil vertical des fluctuations de la composante longitudinale de la vitesse. A différentes localisations $(x-x_{cyl})/D = 1, 2; 1, 5; 2, 0; 2, 5; 3, 0$ du haut vers le bas. Symboles : — : *SND V*, — · — : *SND VI*, $\diamond$ Simulation spectrale de Mittal et Balachandar [74]*

La figure 4.15 nous confirme l'importance de l'utilisation des schémas d'ordre élevé. L'utilisation des schémas d'ordre 2 entraîne une forte surestimation des fluctuations de la composante verticale de la vitesse, ce qui est une caractéristique de la nature bidimensionnelle de l'écoulement. Si l'on s'intéresse à la fréquence de lâcher des tourbillons f , et que l'on cherche à calculer le nombre de Strouhal $St = fD/U$, on trouve pour notre simulation *SND III*, un nombre de Strouhal égal à 0,204 alors que pour la simulation *SND I* on trouve un nombre de Strouhal égal à 0,213. Mittal et Balachandar [74] obtiennent un nombre de Strouhal égal à 0,203 ce qui confirme les conclusions précédentes.

Synthèse

Ces tests et ceux de Parnaudeau *et al.* [80] nous permettent de dégager des points importants concernant cet écoulement, et l'utilisation de la méthode de forçage améliorée

- D'après Parnaudeau *et al.*, l'utilisation d'un écoulement miroir combinée à des schémas d'ordre 6 entraîne une meilleure description de la dynamique et permet de mieux prédire les grandeurs moyennes et fluctuantes de l'écoulement pour des schémas collocalisés.
- ⇒ **Nous confirmons ce résultat avec une grille décalée pour la pression.**
- D'après Parnaudeau *et al.*, l'utilisation d'un écoulement miroir combinée à des schémas d'ordre 2 n'apporte aucune amélioration pour des schémas collocalisés.
- ⇒ **Nous confirmons ce résultat avec une grille décalée pour la pression.**
- D'après Parnaudeau *et al.*, l'utilisation des schémas collocalisés d'ordre 6 permet d'obtenir de meilleurs résultats que si on utilise des schémas collocalisés d'ordre 2.
- ⇒ **Nous ne confirmons pas ce résultat avec une grille décalée pour la pression.**
- A la résolution R_1 , il n'y a presque aucune différence entre les schémas d'ordre 6 et d'ordre 2 au niveau de la retranscription de la dynamique tourbillonnaire et au niveau des statistiques.

- A la résolution R_2 , l'utilisation des schémas décalés d'ordre 6 est en revanche à nouveau bénéfique pour une meilleure description de la dynamique et permet de nouveau de mieux prédire les grandeurs moyennes et fluctuantes de l'écoulement.

4.5 Synthèse générale

Comme nous pouvons le voir, nous avons effectué un grand nombre de simulations de «validation» pendant cette thèse. Cette étape indispensable et très coûteuse en temps était indispensable si nous voulions être certain de l'exactitude de nos développements numériques. Nous avons orienté ces validations sur quatre axes :

- validation des nouvelles TFR et du code en Fortran 90
- validation du nouveau solveur de Poisson
- étude du comportement des schémas de discrétisation spatiale
- compréhension de la méthode de modélisation par forçage avec écoulement interne

Si nous avons pu tester dans un contexte bidimensionnel toutes les configurations possibles d'écoulements, il est bien évident que pour les simulations tridimensionnelles, il reste un travail à faire pour valider certaines configurations. Cependant, il est important de noter que tous les développements majeurs ont été réalisés et que contrairement à la version précédente du code, un grand nombre de simulations est désormais envisageable comme le rappelle le tableau (3.4).

L'écoulement spatial de couche de mélange que nous allons étudier maintenant fait appel à tous les développements qui ont été faits durant cette thèse

Avec la version précédente du code, il était impossible d'envisager ce genre de simulation avec la prise en compte des parois de la plaque séparatrice, rendue possible grâce à l'utilisation d'un maillage raffiné, lui-même compatible avec le nouveau solveur spectral.

Chapitre 5

Configuration étudiée : la couche de mélange

La configuration d'écoulement étudiée dans le cadre de cette thèse pour mettre en valeur nos développements numériques est la couche de mélange. Cet écoulement est, du fait de sa simplicité, un sujet théorique important, mais son étude présente également un grand intérêt industriel, aussi bien civil que militaire. Par exemple, en aérodynamique, le décollement des couches limites donne naissance à des couches de mélange. On retrouve également ce type d'écoulement dans d'autres secteurs tels l'industrie chimique ou agro-alimentaire. La couche de mélange est un écoulement cisailé libre, caractérisée par la confluence de deux écoulements parallèles de vitesses différentes au bord de fuite d'une plaque séparatrice.

Depuis de nombreuses années, cet écoulement a fait l'objet au LEA de nombreuses études expérimentales [30, 12, 11, 81]. Récemment, Perret [81] a travaillé sur une configuration de couche de mélange avec modification du bord de fuite (de type culot ou biseauté). Dans cette thèse, nous avons cherché à reproduire dans une certaines mesures ces expériences menées en soufflerie. Deux types d'écoulements de couche de mélange ont été considérés : une couche de mélange dont le bord de fuite est de type culot (couche de mélange épaisse ou CME) et une couche de mélange dont le bord de fuite est de type mince (couche de mélange classique ou CMC). Les deux géométries de la plaque séparatrice sont présentées dans la figure (5.1).

Dans ce chapitre, nous allons dans un premier temps étudier la dynamique de la couche de mélange classique. Ensuite nous introduirons quelques notions de stabilité sur les écoulements cisailés libres. Enfin, nous aborderons l'influence de la composante sillage dans un écoulement de couche de mélange.

5.1 L'écoulement de couche de mélange

Les mécanismes et la dynamique d'un écoulement de couche de mélange ont fait l'objet ces dernières années de nombreux travaux expérimentaux et numériques. Nous ne présenterons ici que des généralités concernant ces mécanismes.

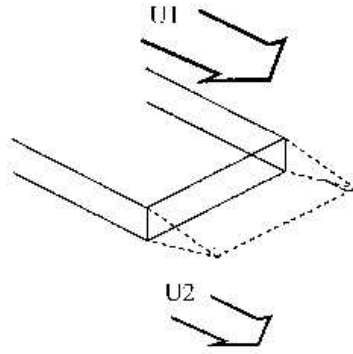


FIG. 5.1 – Visualisation de la géométrie des deux bords de fuite.

Avant de décrire cet écoulement, nous allons introduire la notion de structure cohérente en mécanique des fluides. Nous verrons aussi comment les détecter. En effet, pour une bonne interprétation physique des résultats, il est indispensable d'avoir des outils de détection et d'identification performants que ce soit en expérimentale ou en numérique.

5.1.1 Notion de structures cohérentes

L'existence de structures organisées spatialement au sein d'un écoulement turbulent est aujourd'hui reconnue. L'importance du rôle de ces structures pour la compréhension ou encore pour le contrôle de la dynamique de l'écoulement est admise tant au niveau fondamental qu'industriel. C'est pourquoi a été introduit le concept de structures cohérentes [99, 15]. Le caractère organisé de ces structures a été mis en évidence expérimentalement par les visualisations de Brown et Roshko [15] dès les années 1970. Un exemple classique de ces visualisations est donnée sur la figure (5.2).

La définition de structures cohérentes est encore de nos jours assez délicate et reste un sujet de discussion assez controversé. C'est pourquoi il existe un grand nombre de définitions selon les auteurs. Nous rappelons ici les plus courantes

- Hussain [42] définit une structure cohérente comme étant une masse de fluide à grande échelle dont la vorticité évolue en corrélation de phase sur l'ensemble de son évolution spatiale.
- Selon Lesieur [63], un domaine contenant une concentration de vorticité locale sera considéré comme cohérent s'il garde une forme reconnaissable pendant un temps suffisamment long devant son temps de retournement et si son évolution est très sensible à de petites variations des conditions initiales au sein du fluide.
- Pour Lumley [67], une structure cohérente correspond à un objet spatio-temporel dont la projection sur le champ de vitesse de l'écoulement est maximale au sens des moindres carrés. Il introduit de cette manière la décomposition orthogonale aux valeurs propres.

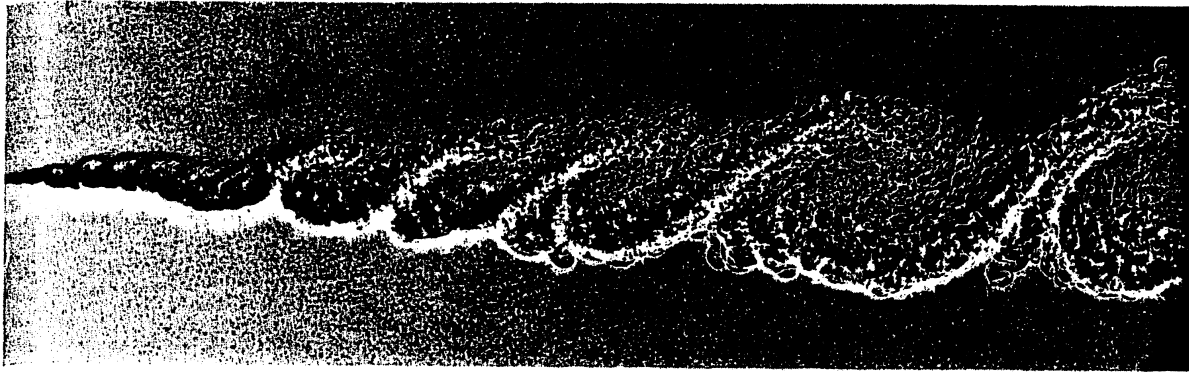


FIG. 5.2 – Visualisation de structures cohérentes en couche de mélange. (D'après Brown et Roshko [15])

Même si ces définitions sont différentes, on peut dire, *priori*, qu'elles vont permettre d'identifier les mêmes évènements.

En raison de la difficultés à les définir, il existe plusieurs méthodes de détection et d'identification des structures cohérentes. Voici une liste non-exhaustive de quelques unes de ces méthodes. Les outils de mise en évidence des structures cohérentes d'un écoulement turbulent sont généralement différents suivant la nature des données traitées (expérimentales ou numériques). En effet, expérimentalement, on dispose généralement de statistiques bien convergées mais de résolutions spatiales relativement peu élevées. A l'inverse, la résolution spatiale est privilégiée en numérique, au détriment de la convergence statistique, bien que la puissance croissante des ordinateurs permet maintenant d'obtenir des statistiques de mieux en mieux convergées.

Méthode de détection à partir de données expérimentales

Les premières méthodes étaient basées sur des visualisations et complétées plus tard par traitement d'images. En parallèle, se développaient des techniques de mesures en un point s'appuyant sur des données statistiques et spectrales ainsi que des mesures en deux points autour de la corrélation spatio-temporelle. A partir de ces techniques, on peut distinguer principalement trois méthodes d'identification

- Les méthodes conditionnelles : Ces méthodes sont basées sur l'examen des quantités instantanées de l'écoulement. L'idée de ces méthodes est la perturbation par les structures de l'écoulement des caractéristiques globales du signal [3].
- Les méthodes basées sur les corrélations en deux points : pour ces méthodes, on fait l'hypothèse que, malgré le caractère aléatoire de l'écoulement, les structures à grandes échelles ont des caractéristiques suffisamment reproductibles pour obtenir à partir de données statistiques des informations pertinentes. Par exemple, la *POD* (Proper Orthogonal Décomposition en anglais ou Décomposition Orthogonale aux valeurs propres) propose une détermination de la structure dominante au sens

énergétique [67]. La *LSE* (Linear Stochastic Estimation en anglais ou Estimation Stochastique Linéaire permet d'obtenir des structures conditionnelles à partir de mesures globales [2]. Depuis quelques années, une méthode associant l'Estimation Stochastique Linéaire et la Décomposition Orthogonale aux valeurs propres a été développée au laboratoire [9, 81, 30].

- Les méthodes basées sur l'information fréquentielle : On pourra citer ici les techniques du filtrage optimal et les analyses temps-fréquences et en ondelettes [34].

Pour de plus amples informations, le lecteur pourra se référer à l'article de Bonnet *et al.* [10] dans lequel les auteurs ont comparé différentes techniques d'identification de structures cohérentes appliquées à la même base de données issue d'un écoulement de couche de mélange plane incompressible.

Méthode d'identification à partir de données numériques

Nous avons choisis deux critères qui permettent la détection et l'identification des structures cohérentes. Le premier critère que nous avons choisi est la vorticité

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = \omega_x \mathbf{x} + \omega_y \mathbf{y} + \omega_z \mathbf{z}. \quad (5.1)$$

Par la suite, les structures de la turbulence (comme les tourbillons) seront visualisées principalement avec la norme de la vorticité, noté ω_n , et défini

$$\omega_n = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}. \quad (5.2)$$

L'inconvénient majeur de ce critère est qu'une valeur non nulle de ω_n n'est pas nécessairement la signature d'un tourbillon, mais peut être la présence d'un cisaillement. Un soin particulier doit être apporté sur les niveaux de vorticité visualisés, si un niveau important doit être donné à ω_n pour visualiser une structure tourbillonnaire, elle n'indique pas obligatoirement la présence d'un tourbillon.

L'autre critère retenu est le critère Q . Il s'agit d'observer les régions positives du second invariant Q du tenseur gradient de vitesse $\Delta \mathbf{u}$. La valeur de Q est donnée par

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^2}{\partial x_i^2} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \\ &= \frac{1}{2} (\|\boldsymbol{\Omega}\|^2 - \|\mathbf{S}\|^2), \end{aligned} \quad (5.3)$$

avec

$$\|\mathbf{S}\| = [\text{tr}(\mathbf{S}\mathbf{S}^t)]^{1/2}, \quad (5.4)$$

$$\|\boldsymbol{\Omega}\| = [\text{tr}(\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega}^t)]^{1/2}. \quad (5.5)$$

$\mathbf{S}$ et $\mathbf{\Omega}$ sont respectivement les parties symétriques et antisymétriques du tenseur gradient de vitesse. Soit

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (5.6)$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (5.7)$$

Q peut aussi s'écrire en fonction du laplacien de la pression tel que

$$Q = \frac{1}{2\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i}. \quad (5.8)$$

On aura une valeur positive de Q quand le taux de rotation ($\mathbf{\Omega}^2$) sera supérieur à la tension ($\mathbf{S}^2$), qui indiquera une zone tourbillonnaire. L'association de ces deux critères va donc nous permettre de faire une bonne analyse et une détection correcte des structures cohérentes indispensables à la bonne compréhension de la phénoménologie tourbillonnaire.

Propriétés générales

Nous allons considérer par la suite un écoulement de couche de mélange plane en aval d'une plaque séparatrice. Nous allons introduire ici les notations que nous avons utilisées pour caractériser nos écoulements. Les vitesses maximales et minimales sont notées respectivement U_1 et U_2 . Les épaisseurs de déplacement des couches limites sont notées respectivement δ_1 et δ_2 . Elles sont définies par

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\langle u \rangle}{U_1}\right) dy \quad \text{et} \quad \delta_2 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\langle u \rangle}{U_2}\right) dy \quad (5.9)$$

Les épaisseurs de quantité de mouvement des couches limites sont notées respectivement $\delta_{\theta 1}$ et $\delta_{\theta 2}$. Elles sont définies par

$$\delta_{\theta 1} = \int_0^\infty \frac{\langle u \rangle}{U_1} \left(1 - \frac{\langle u \rangle}{U_1}\right) dy \quad \text{et} \quad \delta_{\theta 2} = \int_0^\infty \frac{\langle u \rangle}{U_2} \left(1 - \frac{\langle u \rangle}{U_2}\right) dy \quad (5.10)$$

La figure 5.3 nous montre la configuration de l'écoulement.

Afin de définir la couche de mélange, nous avons utilisé plusieurs paramètres

- la différence de vitesse $\Delta U = U_1 - U_2$,
- le rapport des vitesses $r = \frac{U_1}{U_2}$,
- la vitesse moyenne $U_m = \frac{U_1 + U_2}{2}$,
- le paramètre de vitesse $\lambda = \frac{\Delta U}{2U_m} = \frac{1-r}{1+r}$
- le nombre de Reynolds $Re_{cm} = \frac{h\Delta U}{\nu}$, basé sur la différence de vitesse ΔU et l'épaisseur de la plaque séparatrice h que l'on appellera Reynolds de couche de mélange. Perret [81] a utilisé ce Reynolds dans ces investigations expérimentales.
- le nombre de Reynolds $Re_s = \frac{hU_m}{\nu}$, basé sur la moyenne U_m de la vitesse de l'écoulement, que l'on appellera Reynolds de sillage. Notons que l'on a $Re_{cm} = 2\lambda Re_s$.

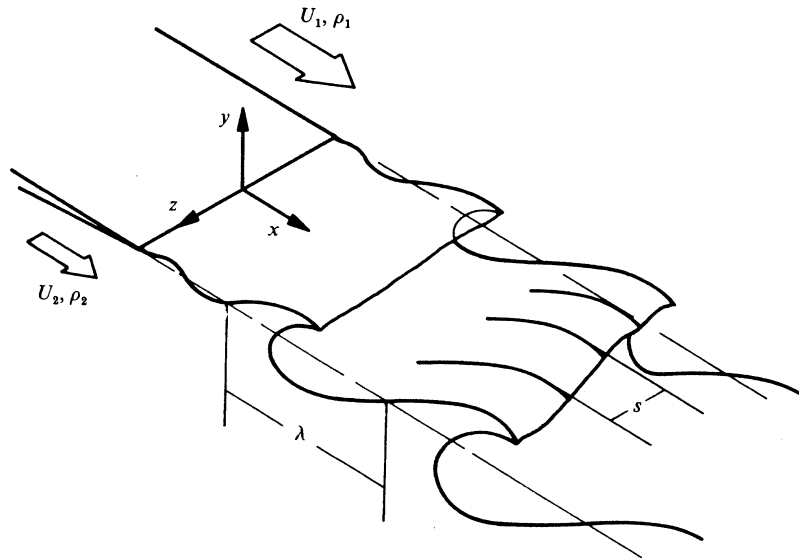


FIG. 5.3 – Couche de mélange plane (D'après Bernal et Roshko [6]).

5.1.2 Dynamique de l'écoulement de couche de mélange

Bernal et Roshko [6] ont montrés que l'écoulement de couche de mélange est dominé principalement par des grosses structures tourbillonnaires (structures primaires) alignées avec le bord de fuite de la plaque séparatrice. Ces dernières sont ensuite déformées par des structures secondaires, constituées de tourbillons contrarotatifs d'axes longitudinaux. La figure 5.4 montre ces deux types d'organisation.

Les structures primaires résultent d'une instabilité de Kelvin-Helmoltz, elle-même causée par la discontinuité engendrée par le différentiel de vitesse [65, 40]. Il se développe alors une zone de turbulence en aval du point de rencontre des deux écoulements de vitesse respective U_1 et U_2 . Sous l'effet de cette instabilité de Kelvin-Helmoltz, la nappe de vorticité se divise en plusieurs zones : des zones de forte vorticité dans les noyaux des tourbillons principaux et des zones de faible vorticité dans les régions entre ces structures, appelées «braids». Ces grosses structures sont convectées à une vitesse quasi-constante, de l'ordre de $U_c \leq \frac{U_1+U_2}{2}$.

D'après Winant et Browand [104], l'accroissement de la couche de mélange est dû principalement au phénomène d'appariement des tourbillons principaux. Ce phénomène, observé notamment par Hussain [42], résulte de l'interaction de deux structures voisines qui fusionnent entre elles pour donner naissance à une nouvelle structure unique, encore plus grosse. On observe (figure 5.5) après chaque appariement une augmentation de la distance entre chaque structures. D'après Bell et Metha [5], cet espacement double après chaque appariement.

Winant et Browand [104] ont observé des appariements de deux tourbillons à des faibles nombres de Reynolds. Dans leurs études à plus hauts nombres de Reynolds, Jimenez [44],

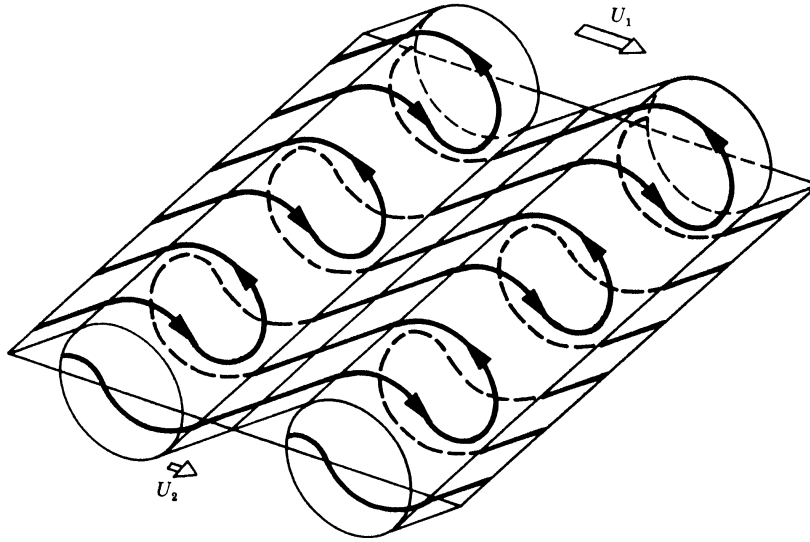


FIG. 5.4 – Schéma représentant l'organisation principale dans un écoulement de couche de mélange plane (D'après Bernal et Roshko [6]).

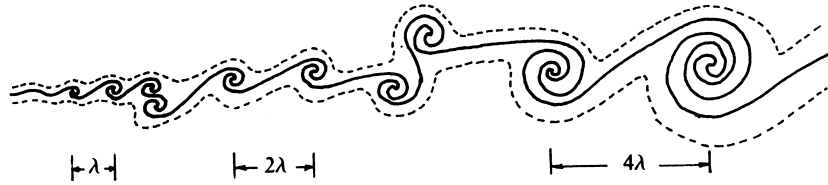


FIG. 5.5 – Visualisation des interactions entre les tourbillons dans une couche de mélange plane (D'après Hussain [42]) avec une vue schématique du phénomène d'appariements.

Roshko [90] ou encore Dimotakis et Brown [29] ont montré que l'accroissement de la couche de mélange se produisait principalement entre chaque appariement, dans les tourbillons principaux. Leur argument principal est basé sur la nécessité par les structures primaires d'absorber du fluide irrotationnel. Ce dernier est entraîné dans la couche de mélange de façon à alimenter les grosses structures. Cette autre mécanisme responsable de l'expansion de la couche de mélange, a été analysé en détails par Dimotakis [28] et Moore et Saffmann [77].

L'origine des structures secondaires est plus sujette à controverse. Bernal et Roshko [6] ont mis en évidence l'existence de structures secondaires correspondant à des tourbillons contrarotatifs de vorticité d'axe longitudinal. Selon eux, l'origine de la formation de ces tourbillons est dû à une instabilité interne des structures primaires. Ils ont aussi observé que le nombre de Reynolds critique de déclenchement de cette instabilité décroissait avec la diminution du rapport de vitesse de la couche de mélange, ce qui tendrait à prouver

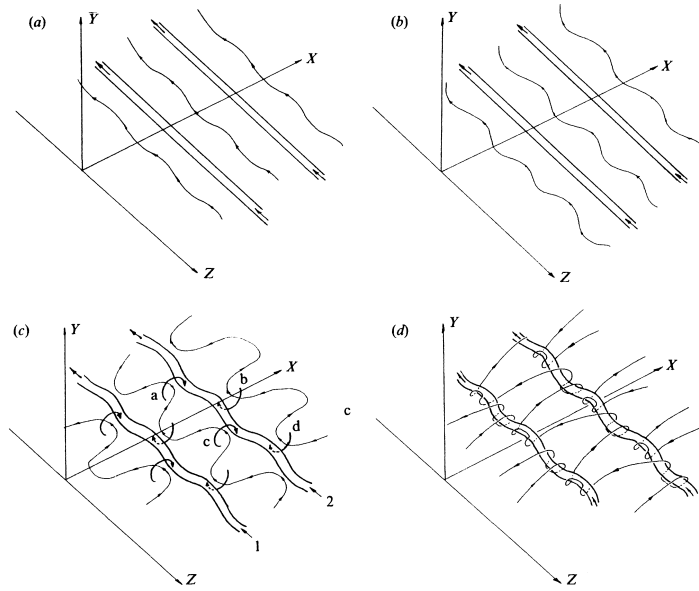


FIG. 5.6 – Schéma représentant le développement des instabilités tridimensionnelles dans un écoulement de couche de mélange (D'après Lasheras et Choi [59]).

qu'il existe une composante de sillage, plus instable aux perturbations tridimensionnelles, dans le profil de l'écoulement.

Briedenthal [14] et Lasheras *et al.* [58] confirment ces conclusions. Selon ces auteurs, ces structures secondaires prennent naissance dans les zones de stagnations entre chaque région locale d'appariement. Sous l'effet de l'augmentation de l'instabilité de Kelvin-Helmoltz, il y a création d'un champ de contraintes dans ces régions, ce qui engendre la déformation des tubes de vorticité (ou filaments), observables à la figure (5.6 a). Ces filaments prennent la forme d'épingle à cheveux étirées (vers l'aval) entre les structures primaires (5.6 c) pour finalement donner naissance à des paires de tourbillons contra-rotatifs, qui vont à terme, envelopper les structures primaires (5.6 d).

Ainsi selon cette interprétation, la tridimensionnalisation prendrait naissance dans les régions où la vorticité est la plus faible. La turbulence se développerait à partir des structures primaires puis vers les structures secondaires. Comte [22] propose une autre hypothèse selon laquelle la tridimensionnalité apparaîtrait d'abord au niveau des tourbillons primaires, là où la vorticité est la plus forte. Dans ses simulations, il a observé une tridimensionnalisation des tourbillons primaires avant l'apparition des tourbillons secondaires [24]. De plus, il a observé que la nature des appariements pouvait varier en fonction de la perturbation initiale. En effet, il a montré [24] qu'une perturbation 3D dans la condition initiale pouvait conduire à des appariements hélicoïdaux dans la couche de mélange.

Le développement de la couche de mélange est sensible à la nature des conditions initiales qui lui donnent naissance. De nombreux paramètres influent sur la dynamique tourbillonnaire de cet écoulement

- La nature des couches limites sur la plaque séparatrice qui peuvent être laminaires ou turbulentes. L'influence de ce paramètre a été étudiée notamment par Rogers et Moser [89] et par Bell et Metha [5].
- La géométrie de la plaque séparatrice. Par exemple, Dziomba et Fielder [33] ont montré que l'épaisseur du bord de fuite de la plaque séparatrice a une influence sur le développement de la couche de mélange lorsqu'elle est supérieure à 50% de la somme des épaisseurs de déplacement de couche limite au point de séparation.
- L'intensité de turbulence de l'écoulement libre [94] qui joue un rôle sur la location longitudinale de la zone de similitude.
- Les effets de compressibilité lorsque l'écoulement est supersonique avec une augmentation de la zone de mélange [15].

Dans cette étude, nous nous sommes intéressés à l'influence de la géométrie de la plaque séparatrice au bord de fuite avec l'introduction d'un effet de sillage dans l'écoulement de couche de mélange. Certains de ces paramètres, tels que la modification de l'épaisseur du bord de fuite, ou la modification du cisaillement, peuvent constituer un moyen de contrôle actif ou passif de l'écoulement de couche de mélange [35].

5.2 Généralité sur la stabilité des écoulements cisailés libres

L'utilisation de notions de stabilité dont les concepts sont très brièvement présentés dans cette partie peut apporter des éléments de compréhension sur la dynamique de l'écoulement et plus particulièrement sur l'influence de plusieurs paramètres. La transition à la turbulence dans les écoulements cisailés libres peut être comprise en partie en faisant une étude de stabilité linéaire. Cette analyse est basée sur l'étude du développement de perturbations infinitésimales au sein de l'écoulement.

Dans un écoulement, la nature du régime qui s'installe dépend de plusieurs paramètres relatifs aux différentes contributions de l'écoulement. En mécanique des fluides, on utilise de préférence le nombre de Reynolds.

L'étude de la stabilité d'un régime donné repose sur la définition de perturbations autour de cet état et la détermination de leur évolution. La notion la plus générale est alors celle de stabilité au sens de Lyapunov exprimant que les perturbations restent toujours «sous contrôle».

La figure (5.7) illustre la situation générale

- Au dessous d'une valeur du nombre de Reynolds notée Re_g , l'écoulement est inconditionnellement stable : quelque soit la forme et l'amplitude d'une perturbation, elle finit par s'estomper.
- Au dessus d'une certaine valeur Re_c du nombre de Reynolds, l'écoulement évolue inconditionnellement vers un état différent de son état initial qui est dès lors instable. La détermination de ce nombre de Reynolds critique fait appel à la théorie de stabilité linéaire qui étudie l'évolution de perturbations infinitésimales au sein de l'écoulement. La condition ($Re > Re_c$) est une condition suffisante d'instabilité car

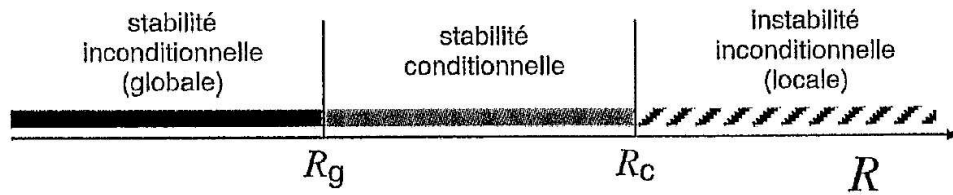


FIG. 5.7 – Stabilité de l'état initial en fonction du nombre de Reynolds (d'après Manneville [71]).

il suffit de l'introduction d'une seule de ces perturbations pour que l'état initial de l'écoulement ne survive pas.

La théorie de stabilité linéaire a été développée principalement dans le contexte des fluides parfaits dès le milieu du $XIX^{ième}$ siècle [88]. Elle a permis de mettre en évidence des écoulements instables et l'existence de profils d'écoulement stables, plus délicats à traiter.

Une source de complication dans les études de stabilité est le phénomène de convection de l'écoulement de l'amont vers l'aval avec pour effet l'évacuation des perturbations. Celles ci peuvent dès lors être emportées vers l'aval ou au contraire se maintenir dans l'écoulement en dépit de ce transport.

Si l'étude de la stabilité linéaire des écoulements a déjà une longue histoire, elle est encore en retrait dans un contexte d'approche non-linéaire notamment pour les écoulements ouverts c'est à dire avec des conditions aux limites de type entrée/sortie (présence d'un débit).

Se pose aussi la question de la compétition entre le mécanisme d'instabilité et le transport vers l'aval. En effet, une perturbation née à un endroit donné et à un instant donné, bien qu'amplifiée, peut laisser l'écoulement retourner à son état initial si elle est emportée par le courant. Monkewitz et Huerre [75] ont introduit le concept d'instabilité absolue ou convective. On peut donc classer les instabilités linéaires en deux nouveaux groupes

- On dit qu'on a affaire à une instabilité absolue si les instabilités sont suffisamment intense pour que les modes instables puissent remonter le courant et se répandre dans tout l'écoulement en dépit de la convection d'ensemble. La perturbation ne s'évacue pas assez rapidement et réussit à croître et à se disperser en amont et en aval de son abscisse de naissance (voir la figure (5.8)). On dit alors que l'écoulement se comporte comme un oscillateur auto-entretenu. Un écoulement de type sillage est un écoulement absolument instable.
- On dit qu'on a affaire à une instabilité convective si les perturbations sont convectées vers l'aval. La perturbation croît mais elle est convectée vers l'aval. Dans ce cas, l'écoulement se comporte comme un amplificateur. La couche de mélange appartient à la catégorie des écoulements convectivement instables. Un tel écoulement satisfait au critère de Rayleigh qui dit que la présence d'un point d'inflexion dans le profil de vitesse est une condition nécessaire d'instabilité.

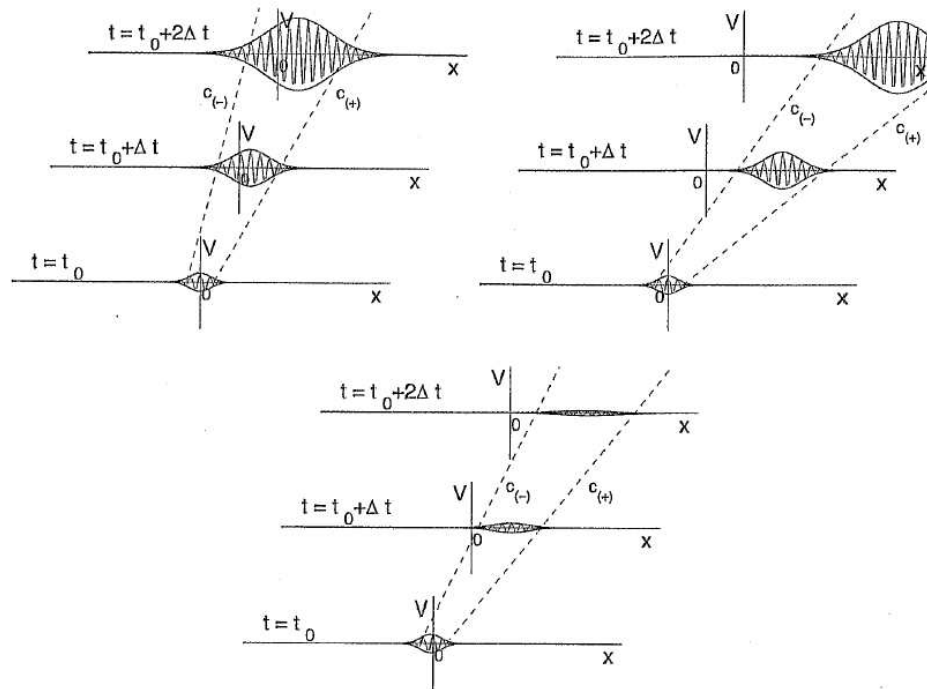


FIG. 5.8 – Schématisation de la réponse d'un écoulement à une perturbation localisée dans le temps et dans l'espace. En haut à gauche, cas d'une instabilité absolue. En haut à droite, cas d'une instabilité convective. En bas, la perturbation s'efface et l'écoulement est stable (d'après Manneville [71]).

La figure (5.8) nous montre les réponses possibles d'un écoulement à une perturbation localisée dans le temps et dans l'espace (d'après Manneville [71]).

Malheureusement en pratique la situation n'est pas aussi simple puisque il faut prendre en compte que l'intensité locale des mécanismes varie dans la direction longitudinale de l'écoulement de telle sorte qu'un changement du caractère de l'instabilité (absolue et/ou convective) peut intervenir. Il peut par exemple apparaître une poche d'instabilité absolue où l'écoulement se comporte comme un oscillateur servant de source d'excitation au reste de l'écoulement qui, convectivement instable, se comporte comme un amplificateur.

Il faut alors étendre l'analyse à l'échelle globale. Chomaz *et al.* [21] ont montré que l'existence d'une instabilité absolue locale est une condition nécessaire mais pas suffisante pour que l'écoulement soit globalement instable. Huerre et Monkewitz [41] ont établi un critère basé sur l'étendue de la zone où l'écoulement est absolument instable et le niveau du taux d'amplification. Ils ont ainsi classé les écoulements en quatre catégories. Ils peuvent être localement ou globalement stables, presque absolument ou globalement instables. Pour une revue complète sur ce thème, le lecteur pourra se référer aux travaux de Huerre et Monkewitz [41] ou encore de Chomaz *et al.* [21].

En jouant sur la géométrie de la plaque séparatrice, nous allons introduire une composante sillage dans l'écoulement de couche de mélange. Nous avons vu que l'écoulement de type sillage était absolument instable et qu'un écoulement de type couche de mélange était convectivement instable. Comment va se comporter l'écoulement ? Va-t-on observer une poche d'instabilité absolue dans l'écoulement de couche de mélange épaisse ? Comment va se comporter l'écoulement avec la prise en compte des parois ? Nous allons essayer dans les deux prochains chapitres de répondre à toutes ces questions.

Dans la prochaine section, nous allons étudier un peu plus en détails l'influence de l'effet de sillage dans un écoulement de couche de mélange.

5.3 Influence de l'effet de sillage sur l'écoulement

Nous avons vu qu'il existait un certain nombre de paramètres pouvant influencer la dynamique d'un écoulement de couche de mélange. Dans cette étude, nous nous sommes intéressé à l'influence de la géométrie de la plaque séparatrice. La modification de la plaque séparatrice entraîne une modification du profil moyen de vitesse longitudinale. Ce dernier joue un rôle essentiel sur la nature des instabilités au sein de l'écoulement et sur la dynamique de l'écoulement.

Les auteurs de travaux en stabilité d'écoulement de couche de mélange modélisent généralement le profil moyen de vitesse par une fonction strictement monotone du type hyperbolique. Cependant, d'un point de vue expérimental, il semble indispensable de prendre en compte la composante sillage dans le profil moyen de vitesse. En effet, plusieurs paramètres comme l'épaisseur du bord de fuite ou la nature des couches limites se développant sur la plaque séparatrice induisent un effet de sillage sur le profil moyen de vitesse.

Koch [46] a réalisé une étude de stabilité avec des profils moyen de vitesse de couche de

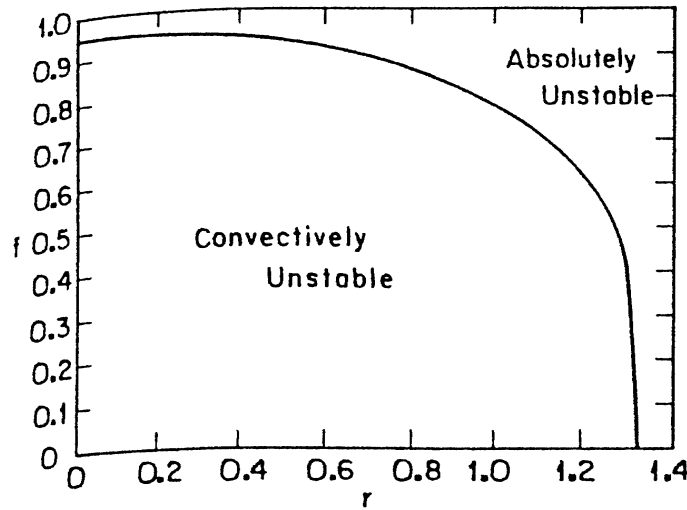


FIG. 5.9 – Gauche : frontière entre instabilité convective et absolue en écoulement de couche de mélange avec effet de sillage (D'après Wallace et Redekopp [100]).

mélange avec fort effet de sillage. L'analyse de stabilité locale est effectuée en faisant varier le déficit de vitesse et le rapport de vitesse $r = U_2/U_1$. Il a observé pour un r fixé, une transition entre une instabilité absolue et une instabilité convective avec une diminution du rapport de vitesse. Il a noté l'apparition d'une zone d'instabilité absolue dans la région proche du bord de fuite. De plus, si ce rapport devient trop faible, on observe la disparition du phénomène de résonance (diminution de la zone d'instabilité absolue) avec le retour à un comportement de type couche de mélange classique.

Koochesfahani et Frieler [47] ont étudié l'influence de la composante sillage sur l'instabilité de couche de mélange en fonction du cisaillement (importance du déficit de vitesse) et du rapport des densités des deux fluides de chaque côté de la plaque séparatrice. Pour modéliser le profil moyen de vitesse, ils ont superposé un profil de sillage de type gaussienne à un profil de couche de mélange de type tangente hyperbolique. Ils ont ainsi pu déterminer sous certaines hypothèses, la prédominance d'un mode correspondant à une organisation de type couche de mélange ou à la prédominance d'un mode correspondant à une organisation de type sillage. Dans le cas d'un fluide de densité uniforme de part et d'autre de la plaque séparatrice, ils ont observés que le taux d'amplification du mode couche de mélange est supérieur à celui du mode sillage.

Une étude du même type a été entreprise par Wallace et Redekopp [100] dans le cas d'un fluide de densité uniforme. Ces derniers proposent de modéliser le profil moyen de vitesse par une fonction du type

$$\langle u(y) \rangle = 1 - f \operatorname{sech}^2(y/\delta) + \lambda \tanh(y/\delta) \quad (5.11)$$

Le paramètre f représente le déficit de vitesse dû au sillage et λ le paramètre de vitesse égal à $\Delta U/2U_m$. Leur analyse montre l'existence de valeurs critiques de ces paramètres pour lesquelles l'instabilité de l'écoulement passe d'une nature convective à une nature absolue comme le montre la figure (5.9). C'est grâce à cette étude de stabilité que nous allons pouvoir déterminer dans nos simulations la présence ou non de zone d'instabilité absolue.

5.4 Synthèse

L'écoulement de couche de mélange qui pouvait apparaître comme un écoulement assez simple à étudier fait appel à des mécanismes complexes et encore sujets à discussion entre les spécialistes.

L'utilisation d'une plaque séparatrice avec un bord de fuite de type culot modifie considérablement la dynamique de l'écoulement par rapport à une couche de mélange classique. Il est fort probable que l'introduction d'une composante de type sillage dans un écoulement de couche de mélange crée une zone d'instabilité absolue en aval du bord de fuite jouant le rôle d'un oscillateur dans l'écoulement et rendant l'écoulement globalement instable. On peut penser qu'une composante de type sillage suffisamment importante va entraîner la prédominance d'un comportement de type sillage dans la région en aval du bord de fuite et donc une modification importante de la dynamique de l'écoulement.

C'est un écoulement qui est étudié depuis de nombreuses années au laboratoire [30, 12, 11, 81]. Perret [81] a travaillé sur une configuration de couche de mélange avec modification du bord de fuite (culot ou biseauté) dans son étude sur la mise en œuvre d'interfaces expérience/simulation. Il a ainsi pu analyser l'influence de la composante de type sillage dans la dynamique de couche de mélange. De plus, cet type d'écoulement est parfaitement adapté pour mettre en valeur nos développements numériques. Jusqu'à présent, il n'était pas possible avec notre code de calcul de réaliser des simulations avec différentes géométries pour la plaque séparatrice puisque cette dernière ne pouvait jamais être prise en compte.

Grâce aux développements effectués au cours de cette thèse, nous avons pu mettre au point un code de calcul permettant ce genre de simulations avec la prise en compte de la plaque séparatrice. Nous allons maintenant découvrir les résultats de nos simulations d'un écoulement de couche de mélange épaisse réalisées avec **Incompact3d**.

Chapitre 6

La couche de mélange épaisse

Nous avons vu dans le chapitre précédent que le changement de géométrie du bord de fuite de la plaque séparatrice constituait un bon moyen de modifier la dynamique de l'écoulement de couche de mélange.

Nous allons dans ce chapitre étudier un écoulement de couche de mélange épaisse dont l'épaisseur de la plaque est de l'ordre de grandeur des couche limites se développant de part et d'autre de la plaque. C'est un écoulement un peu plus réaliste qu'un écoulement de couche de mélange classique qui présente des conditions plus proches de celles rencontrées dans les configurations industrielles.

Nous avons réalisé des *SND* spatiales d'un écoulement derrière un obstacle de type culot, modélisé à l'aide de la méthode de forçage direct avec écoulement miroir. Le solveur de l'équation de Poisson entièrement spectral nous permet d'utiliser un maillage inhomogène dans la direction verticale de l'écoulement afin d'éviter tout problème de confinement et de manière à pouvoir prendre en compte de façon correcte la plaque séparatrice avec la méthode de forçage direct avec un raffinement de grille important au centre du domaine de calcul.

Dans un premier temps, nous avons réalisé des simulations bidimensionnelles afin de valider nos développements numériques et de déterminer nos paramètres pour la simulation tridimensionnelle. De plus, ces simulations nous ont permis d'étudier l'influence de plusieurs paramètres tels la longueur de la plaque séparatrice, le rapport de vitesse, ou encore la fréquence de la perturbation dans la condition d'entrée.

Dans un second temps, à partir des résultats des simulations précédentes, nous avons mené une *SND* tridimensionnelle pour un nombre de Reynolds $Re_{cm} = 400$. Nous avons effectué des visualisations instantanées de l'écoulement puis nous avons réalisé une analyse statistique de nos résultats dans le but d'effectuer des comparaisons avec les résultats de Perret [81]. A noter que ces résultats expérimentaux ont été réalisés avec un nombre de Reynolds $Re_{cm} = 14400$. De plus, nous avons utilisé des conditions aux limites laminares de type Blasius alors qu'elles sont turbulentes dans la configuration expérimentale. De ce fait, on ne pourra attendre qu'un accord qualitatif avec nos simulations à Reynolds $Re_{cm} = 400$.

6.1 Calculs préliminaires

Dans cette section, nous avons effectué un grand nombre de simulations bidimensionnelles dans le but de déterminer les paramètres de la simulation de référence. Tout d'abord, il a fallu trouver la taille de notre domaine de calcul. La soufflerie utilisée par Perret [81] dans ses investigations expérimentales est la soufflerie subsonique **E300** de type Eiffel implantée au CEAT. Elle possède une veine d'essais de section $0,3 \times 0,3 \text{ m}^2$, longue de 2 mètres. La plaque séparatrice est d'épaisseur h égal à 19 mm.

Nous avons choisi de dimensionner notre domaine de calcul en fonction de l'épaisseur h de la plaque. Perret a effectué des mesures jusqu'à 1000 mm en aval de la plaque séparatrice soit environ $53h$. C'est pourquoi notre domaine de calcul devra être choisi un peu plus grand que cette longueur dans la direction longitudinale. La longueur de la plaque sera choisi de telle sorte à obtenir un profil de couche limite au niveau du bord de fuite en accord avec les investigations expérimentales de Perret [81]. Dans la direction verticale de l'écoulement, nous utilisons un maillage inhomogène avec un raffinement important au centre du domaine de calcul. Afin de représenter correctement la plaque séparatrice, nous avons choisi un Δy_{min} environ quatre fois plus petit que la taille de maille dans les deux autres directions. De plus nous avons choisi une taille de domaine égale à $L_y = 96h$ de manière à éviter tout phénomène de confinement dans cette direction. Enfin dans la direction longitudinale, nous avons choisi une taille de domaine $L_z = 9h$, le nombre de points de grille n_z étant choisi de manière à avoir $\Delta x = \Delta z$. Les investigations expérimentales de Perret [81] ont été réalisées avec un nombre de Reynolds $Re_{cm} = \frac{h\Delta U}{\nu} = 14400$. Il est bien sur à l'heure actuelle impossible d'envisager de mener des *SND* avec un tel Reynolds. En fonction de notre résolution, nous avons donc choisi un nombre de Reynolds $Re_{cm} = 400$, suffisant tout de même pour observer une turbulence tridimensionnelle développée. A noter que l'on a la relation $Re_{cm} = 2\lambda Re_s$ où $Re_s = \frac{hU_m}{\nu}$ est le Reynolds de sillage.

Nous allons maintenant étudier plus en détails la configuration de l'écoulement, avec la génération des couches limites, la mise en œuvre de la plaque séparatrice et le choix de la longueur de la plaque. De plus, nous étudierons l'influence du rapport de vitesse r et de la condition d'entrée sur la dynamique de l'écoulement.

6.1.1 Configuration de l'écoulement

L'écoulement étudié ici est décrit sur la figure (6.1). On considère le développement spatial d'une couche de mélange épaisse incompressible créée entre deux écoulements parallèles de vitesses différentes U_1 et U_2 ($U_2 \leq U_1$) sur un domaine de taille (L_x, L_y) . La plaque séparatrice est d'épaisseur h et de longueur l variable. Les couches limites sont d'épaisseurs de déplacement respectives δ_1 et δ_2 . Le code de calcul ne dispose pas encore d'outils de génération de couches limites turbulentes. C'est pourquoi nous avons utilisé dans la condition d'entrée des couches limites laminares de type Blasius. Pour la vitesse u , nous avons choisi d'utiliser un polynôme d'ordre 6 pour modéliser le profil de vitesse. Les résultats obtenus avec ce polynôme sont très proches de ceux de la solution de Blasius

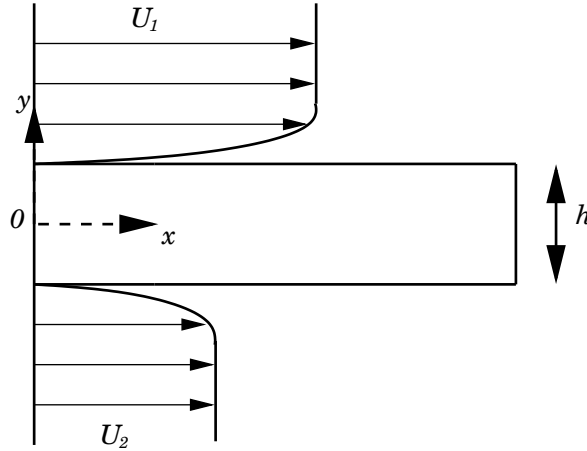


FIG. 6.1 – Configuration de l'écoulement.

[27] et ce profil est très simple à mettre en œuvre. Nous avons choisi d'imposer une vitesse v nulle dans la couche limite. En posant

$$\eta = \frac{(y - h/2)}{\delta 1_{100}} \quad (6.1)$$

où $\delta 1_{100}$ est l'épaisseur totale (100%) de la couche limite coté haute vitesse obtenue à partir du δ_{99} correspondant, le profil moyen de vitesse longitudinal $\langle u_x(y) \rangle$ à l'entrée du domaine du coté haute vitesse est donné par

$$\begin{aligned} \langle u_x(\eta) \rangle &= (2\eta - 5\eta^4 + 6\eta^5 - 2\eta^6) U_1, & 0 \leq \eta \leq 1 \\ \langle u_x(\eta) \rangle &= U_1, & \eta \geq 1 \end{aligned} \quad (6.2)$$

En posant

$$\eta = -\frac{(y + h/2)}{\delta 2_{100}} \quad (6.3)$$

où $\delta 2_{100}$ est l'épaisseur totale (100%) de la couche limite coté basse vitesse obtenue à partir du δ_{99} correspondant, le profil moyen de vitesse longitudinal $\langle u_x(y) \rangle$ à l'entrée du domaine du coté basse vitesse est donné par

$$\begin{aligned} \langle u_x(\eta) \rangle &= (2\eta - 5\eta^4 + 6\eta^5 - 2\eta^6) U_2, & 0 \leq \eta \leq 1 \\ \langle u_x(\eta) \rangle &= U_2, & \eta \geq 1 \end{aligned} \quad (6.4)$$

Mise en œuvre du champ cible pour la composante verticale de la vitesse

La condition d'adhérence à la paroi s'écrit

$$v_0(x, \pm h/2, z, t) = 0. \quad (6.13)$$

Le champ cible s'écrit sous la forme

$$v_0(x, y, z, t) = -g(x, y)v(2l - x, y, z, t), \quad x \in [0, l] \quad (6.14)$$

avec

$$g(x, y) = (|\sin(2\pi y^2) - 1|) \exp(-\beta(x - l)^2) \quad (6.15)$$

qui est la fonction de modulation dans le but d'assurer une meilleure régularité pour le champ cible. Le paramètre β permet de moduler la décroissance de la fonction exponentielle.

Le choix des fonctions de modulations f et g comporte une part arbitraire mais doit cependant répondre à plusieurs exigences

- f devait assurer la condition d'adhérence à la paroi pour $u_0(l, y, z, t)$, soit $f(l, y) = 1$ et $f(x, \pm h/2) = 1$.
- g devait assurer la condition d'adhérence à la paroi pour $v_0(x, \pm h/2, z, t)$, soit $g(l, y) = 1$ et $g(x, \pm h/2) = 1$.
- $f(x, 0) = 0$ pour supprimer la singularité au milieu de la plaque,
- f et g devaient permettre d'assurer l'écoulement inverse proche des parois.

Maintenant que nous avons déterminé notre profil de couche limite laminaire, nous allons déterminer la longueur de la plaque l en essayant d'obtenir un profil de vitesse le plus proche de celui obtenu par Perret [81] au niveau du bord de fuite.

6.1.3 Influence du bord de fuite et détermination de la longueur de la plaque

Nous avons vu que la nature des couches limites pouvait influencer sur la dynamique de l'écoulement de la couche de mélange. Pour nos simulations, nous avons cherché à reproduire dans une certaine mesure le profil obtenu en bout de plaque par Perret [81]. La figure (6.2) nous montre le profil de la vitesse longitudinale obtenue par Perret [81] au niveau du bord de fuite. On constate une forte accélération de cette vitesse le long de la plaque séparatrice. Nous allons voir si en imposant un profil de type Blasius (avec notre polynôme d'ordre 6) pour la vitesse longitudinale, on observe le même comportement au bord de fuite. Pour cela, nous avons mené des simulations avec des longueurs de plaque et des épaisseurs de déplacements en entrée de domaine différentes.

Pour ces essais en soufflerie, Perret [81] a utilisé des conditions aux limites turbulentes de part et d'autre de la plaque séparatrice. La figure (6.3) nous montre le profil de la vitesse longitudinale coté haute vitesse qu'il a obtenu à l'abscisse $x - l = -3h$, l étant la longue de la plaque séparatrice. Comme on peut le voir, il existe une forte influence du bord de fuite sur ce profil de vitesse matérialisé par une accélération de la vitesse proche

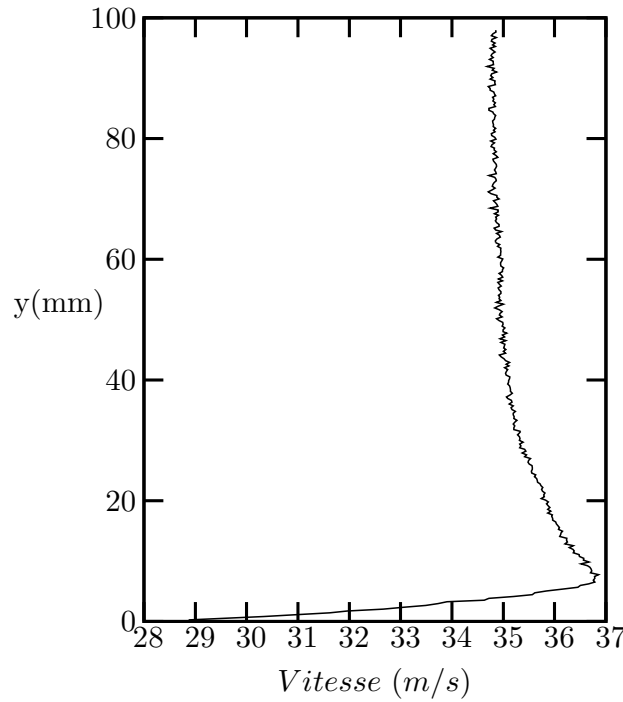


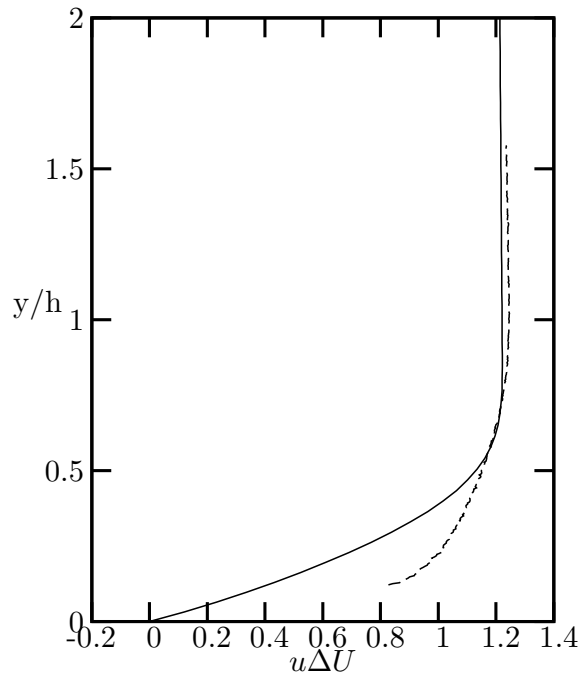
FIG. 6.2 – Visualisation du profil de la vitesse longitudinale au niveau du bord de fuite du côté haute vitesse (d'après Perret [81]).

de la paroi. Nous avons donc fait des simulations avec la même épaisseur (99%) δ_{99} à cette abscisse. afin de déterminer si il est possible d'obtenir le même profil de vitesse, avec des couches limites laminares.

L'objectif de ces simulations a donc été de modéliser le mieux possible le profil de la figure (6.2) en jouant sur la longueur de la plaque l et sur l'épaisseur de déplacement des couches limites à l'entrée du domaine de calcul de telle sorte à obtenir la même épaisseur (99%) δ_{99} que dans les investigations expérimentales de Perret [81].

Bien que l'on utilise un profil de type Blasius pour générer nos conditions aux limites, nous observons aussi une survitesse dans la couche limite dont l'importance varie en fonction de la distance par rapport au bord de fuite. Nous avons réalisé plusieurs simulations et nous avons remarqué que l'influence du bord de fuite sur la couche limite était perceptible jusqu'à $x - l = -7h$, c'est pourquoi pour nos simulations futures, nous avons choisi d'utiliser une plaque séparatrice de longueur $l = 10h$. Ensuite, il a fallu choisir des épaisseurs de déplacement δ_1 et δ_2 en entrée de façon à avoir la même épaisseur (99%) δ_{99} que Perret [81] à l'abscisse $x - l = -3h$. Nous avons donc choisi en fonction de ce critère un δ_1 en entrée égal à $0.0873h$ et un δ_2 égal à 0.0768 .

La figure (6.3), nous montre une comparaison entre le profil expérimental de Perret [81] et le profil de nos simulations. On remarque que l'on a bien la même épaisseur (99%) δ_{99} pour la couche limite coté haute vitesse pour l'abscisse $x - l = -3h$ (figure (6.3 a)) même si comme le montre l'évolution des profils de vitesse, notre couche limite croît comme une

a) Profil à l'abscisse $x - l = -3h$ 

b) Profil au niveau du bord de fuite

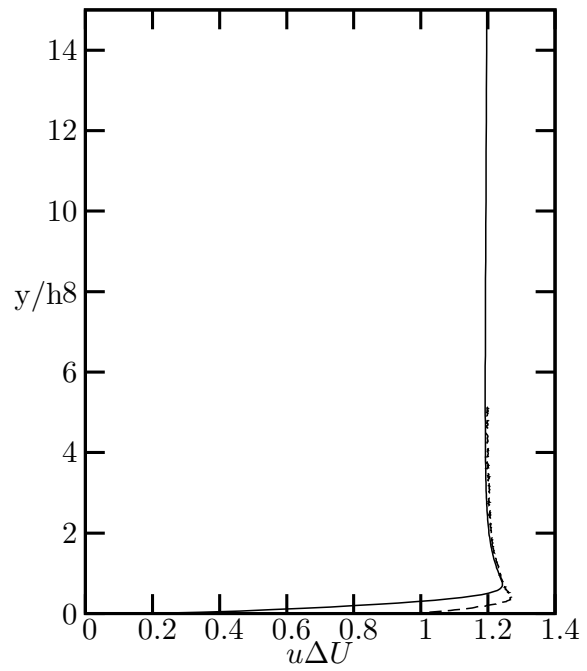


FIG. 6.3 – *Evolution de la couche limite du côté haute vitesse dans nos simulations et chez Perret [81].*

couche limite laminaire alors que la couche limite de Perret [81] croît comme une couche limite turbulente ce qui explique la différence des profils de vitesse au niveau du bord de fuite (figure (6.3 b)).

Nous avons déterminé la longueur de notre plaque ainsi que les épaisseurs de déplacement en entrée de domaine. Comme nous avons $l = 10h$ et que Perret [81] a effectué ses mesures sur $53h$, nous avons décidé de prendre une longueur de domaine dans la direction longitudinale $L_x = 63h$. Maintenant que nous avons la taille de notre domaine, nous pouvons choisir le nombre de points de grille dans chaque direction. Dans la direction verticale, nous voulons un maillage environ quatre fois plus fin que dans les autres directions pour une prise en compte correcte de la plaque séparatrice et nous voulons aussi $\Delta x = \Delta z$. Nous avons donc choisi pour le domaine de taille $(L_x \times L_y \times L_z) = (63h \times 96h \times 9h)$ un nombre de points $(n_x \times n_y \times n_z) = (561 \times 257 \times 81)$ soit un peu moins de 12 millions de points. Avec cette résolution, nous avons $\Delta y = 0,03h$. A noter que si nous avions utilisé un maillage régulier dans cette direction il aurait fallu utiliser 3200 points de grille!

Nous allons maintenant effectuer une petite étude de l'influence du rapport de vitesse r sur la dynamique de cet écoulement. A noter que pour la simulation tridimensionnelle nous utiliserons le même rapport de vitesse que Perret [81].

6.1.4 Influence du rapport de vitesse r

Hammond et Redekopp [38] ont réalisé des *SND* bidimensionnelles d'une couche de mélange spatiale derrière un culot épais pour différents nombres de Reynolds de sillage Re_s compris entre 120 et 520. Plus précisément, ils ont étudié la dynamique et le contrôle, par soufflage ou aspiration au bord de fuite, de l'écoulement de sillage de plaque plane en présence de cisaillement. Ils ont observé la modification de la dynamique de l'écoulement lorsque l'on augmentait ou diminuait le déficit de vitesse. Afin de valider nos méthodes, nous avons mené une série de trois simulations pour un nombre de Reynolds $Re_s = 320$. Les simulations ont été réalisées sur un maillage inhomogène dans la direction transversale de manière à obtenir $\Delta y_{min} = 0,06$. Dans la direction longitudinale, nous avons $\Delta x = 0,1$. A noter que dans les travaux de Hammond et Redekopp [38] nous n'avons pas trouvé d'informations précises sur les épaisseurs des couches limites. Nous savons juste qu'elles sont de l'ordre de l'épaisseur de la plaque séparatrice, c'est pourquoi nous avons pris $\delta_{99} = 0,5h$ de chaque côté de la plaque. Les paramètres des simulations sont donnés dans le tableau (6.4).

Nous avons dans un premier temps réalisé une simulation de référence avec un rapport de vitesse $r = 0,67$. Dans le but de déterminer l'influence du rapport de vitesse sur l'écoulement nous avons ensuite réalisé deux simulations avec rapports de vitesse respectif $r = 0,83$ et $r = 1$. Nous avons effectué une comparaison de nos résultats avec ceux de Hammond et Redekopp [38]. Leurs résultats sont présentés sur la figure (6.4)

Les résultats de nos simulations sont présentés sur la figure (6.5). Nous pouvons dire après l'analyse des champs des résultats que nous retrouvons les tendances de Hammond et Redekopp [38]. On retrouve un écoulement de sillage pour les simulations avec $r = 1$ avec une allée de tourbillons de Karman parfaitement symétrique. Par ailleurs, le calcul du

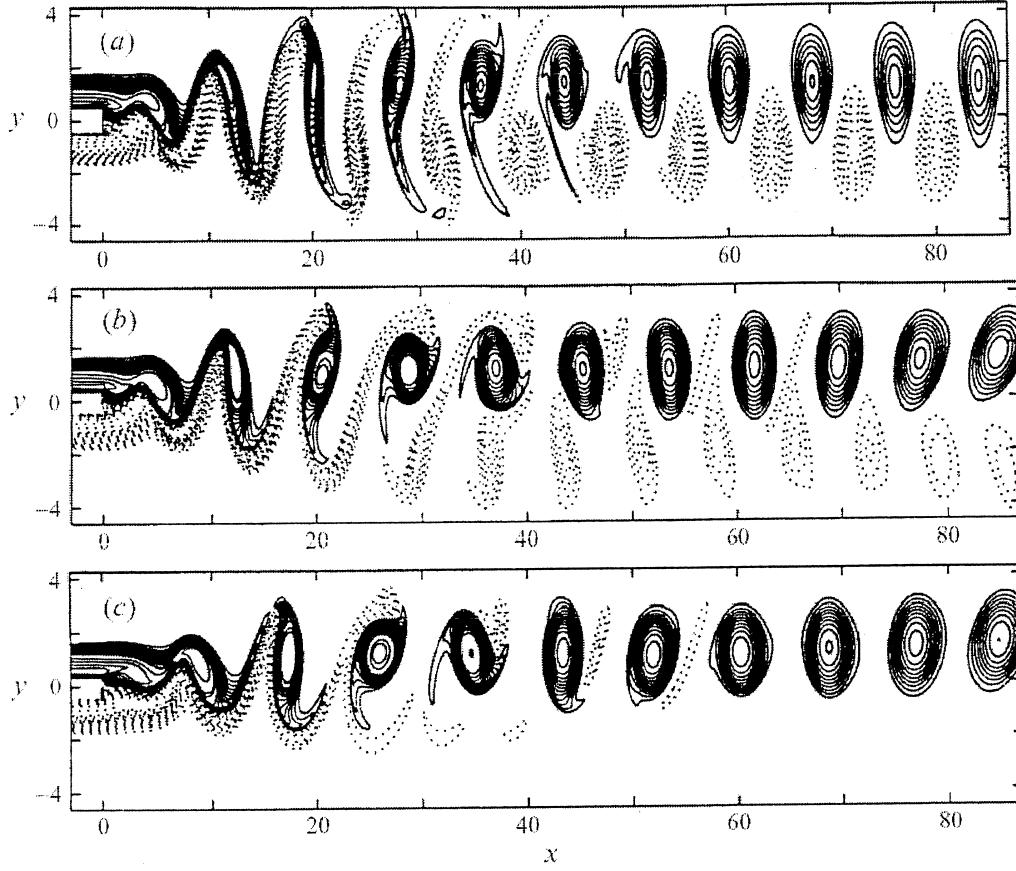


FIG. 6.4 – Simulation numérique directe réalisée par Hammond et Redekopp [38] pour un nombre de Reynolds $Re_s = 320$. Iso-contours de vorticité (— : vorticité positive, $\cdots$: vorticité négative) pour un paramètre de vitesse $r = 1$ (en haut), $r = 0,83$ (au milieu) et $r = 0,67$ (en bas).

Simulation	(L_x, L_y)	(n_x, n_y)	Δt	r	U_1	U_2	Re_s
CME_{ref}	$(90h, 42.8h)$	$(901, 129)$	$0,005h/\Delta U$	0,67	1,2	0,8	320
$CME\ 1$	$(90h, 42.8h)$	$(901, 129)$	$0,005h/\Delta U$	0,83	1,2	1	320
$CME\ 2$	$(90h, 42.8h)$	$(901, 129)$	$0,005h/\Delta U$	1	1,2	1,2	320

TAB. 6.1 – Paramètres des simulations en couche de mélange épaisse bidimensionnelle pour déterminer l'influence du rapport de vitesse r sur l'écoulement.

champ de vorticité confirme le changement de nature du mode dominant (sillage ou couche de mélange). La composante de sillage entraîne un changement de la nature du mode dominant. Cette composante a pour conséquence la prédominance d'un comportement de type sillage dans la région de transition vers le régime de similitude et donc une importante modification de la dynamique de l'écoulement. Cette prédominance du mode sillage dans l'écoulement est plus particulièrement visible pour la simulation avec $r = 0,67$.

On peut noter en outre sur nos résultats (6.5) comme sur ceux de Hammond et Redekopp (figure 6.4) le développement de la couche de mélange coté haute vitesse ($y > 0$) pour les simulations avec $r = 0.67$ et $r = 0.83$. On remarque en effet une disparition progressive des tourbillons coté basse vitesse, ceux si étant absorbés par les tourbillons du coté haute vitesse. On constate un décalage de l'axe de la couche limite avec une diminution du rapport des vitesses. Cet axe a tendance à s'aligner avec le bord supérieur de la plaque séparatrice.

Pour ces simulations, nous obtenons un nombre de Strouhal, défini par $St = fh/U_c$ avec f qui est la fréquence associée aux tourbillons de Kelvin-Helmoltz ou de Karman, égale à 0,106. Hammond et Redekopp [38] obtiennent eux un Strouhal égal à 0,108. On voit donc que dans nos simulations le Strouhal est légèrement sous-estimé mais reste tout de même cohérent par rapport à celui de Hammond et Redekopp [38]. A noter que dans leurs simulations d'un sillage symétrique derrière un profil rectangulaire pour un Reynolds de sillage $Re_s = 200$, Hannemann et Oertel [39] obtiennent un Strouhal égal à 0,113. Le Strouhal de nos simulations semblent en accord avec les résultats de la littérature.

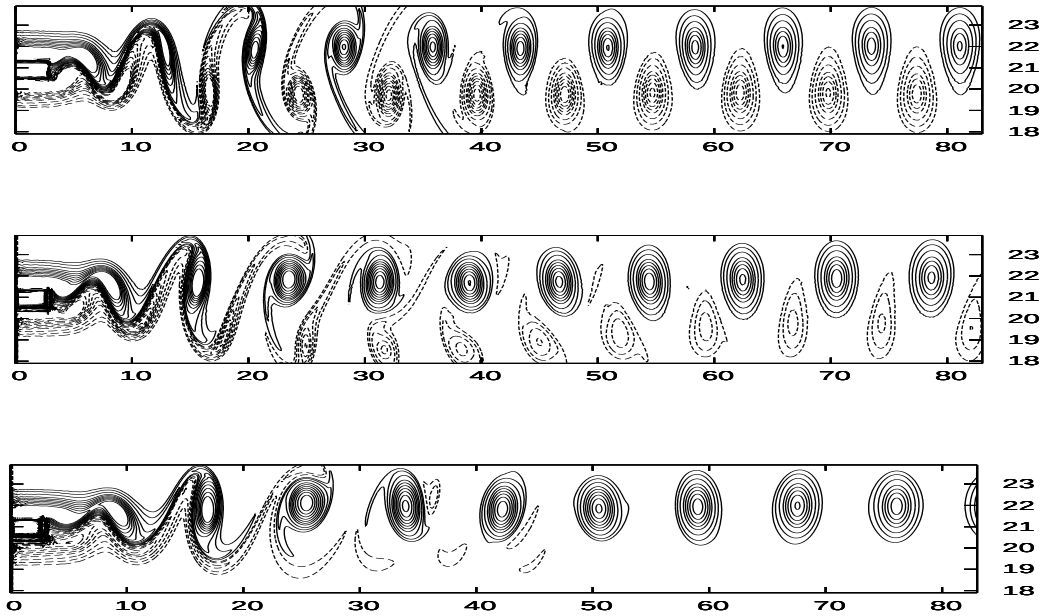


FIG. 6.5 – Iso-contours de vorticité (— : vorticité positive, ... : vorticité négative) pour un paramètre de vitesse $r = 0$ (en haut), $r = 0,1$ (au milieu) et $r = 0,2$ (en bas).

Simulation	(L_x, L_y)	(n_x, n_y)	Δt	U_1	U_2	f_p	Re_{cm}
$CMEp_{ref}$	$(63h, 96h)$	$(561, 257)$	$0,005h/\delta U$	1,2	0,8	0	400
$CMEp\ 1$	$(63h, 96h)$	$(561, 257)$	$0,005h/\Delta U$	1,2	0,8	0,0125	400
$CMEp\ 2$	$(63h, 96h)$	$(561, 257)$	$0,005h/\Delta U$	1,2	0,8	0,025	400
$CMEp\ 3$	$(63h, 96h)$	$(561, 257)$	$0,005h/\Delta U$	1,2	0,8	0,05	400

TAB. 6.2 – Paramètres des simulations en couche de mélange épaisse bidimensionnelle pour déterminer l'influence de la perturbation sur la condition d'entrée

Pour conclure, nous pouvons dire que le rapport de vitesse joue un rôle majeur dans la dynamique de l'écoulement pour cette géométrie de plaque séparatrice. Pour les rapport $r = 0,67$ et $r = 0,83$, l'écoulement est dominé par le mode sillage crée par le bord de fuite épais de la plaque. Les tourbillons de vorticité positive de l'allée de Karman sont progressivement absorbés pour donner naissance en fin de domaine à un écoulement de couche de mélange traditionnelle. Pour la suite de nos simulations, nous travaillerons avec un rapport de vitesse égal à $0,67$ afin d'avoir un effet de sillage important dans l'écoulement de couche de mélange.

6.1.5 Influence des conditions initiales

Pour le moment, toutes les simulations ont été entreprises sans aucune perturbation dans la condition d'entrée. Nous avons vu dans le chapitre sur les méthodes numériques qu'il est possible avec **Incompact3d** d'utiliser à l'entrée du domaine une perturbation afin d'exciter l'écoulement. Nous avons voulu vérifier l'influence d'une éventuelle perturbation à l'entrée du domaine sur la dynamique de l'écoulement. Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'un écoulement de type sillage était absolument instable et qu'un écoulement de couche de mélange classique était convectivement instable.

Nous allons chercher dans cette partie à avoir un début de réponse quant au rôle de la composante sillage dans un écoulement de couche de mélange. Une analyse de stabilité plus détaillée sera effectuée sur l'écoulement tridimensionnel.

Nous avons réalisé une série de plusieurs simulations avec des perturbations de fréquences différentes. Les paramètres de ces simulations sont décrites dans le tableau (6.2). Nous avons choisi de visualiser le champ de vorticité afin d'évaluer l'influence de la perturbation sur la dynamique de l'écoulement. Les résultats sont présentés sur la figure (6.6). Ces visualisations ont été effectuées après une longue période de transition pendant laquelle l'écoulement évacue la condition initiale.

Toutes les simulations aboutissent à un écoulement dans lequel les tourbillons se forment de façon quasi-périodique et sont convectés en aval. L'influence de la perturbation d'entrée semble très limitée sur l'écoulement. On observe juste une petite oscillation dans l'allée des tourbillons pour les simulations réalisées avec une perturbation dans la condition d'entrée. Le nombre de Strouhal défini par $St = fh/U_m$ est ici égal à environ

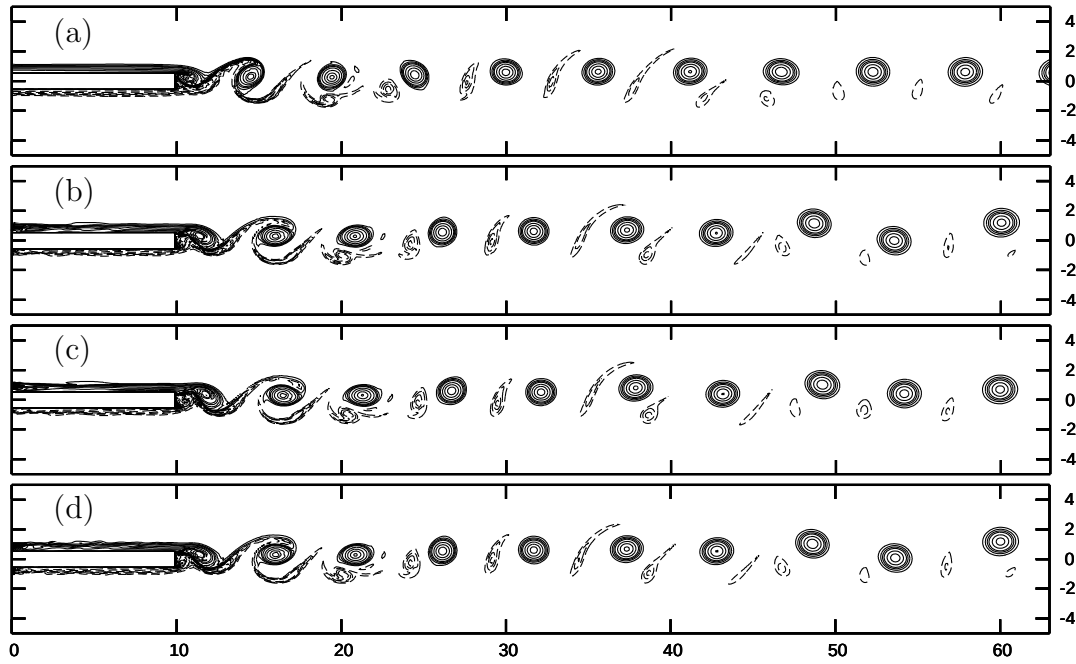


FIG. 6.6 – Iso-contours de vorticité (— : vorticité positive, $\cdots$: vorticité négative) : a) $CMEp_{ref}$, b) $CMEp\ 1$, c) $CMEp\ 2$ et d) $CMEp\ 3$.

0,17 ce qui est consistant avec les résultats de Hammond et Redekopp [38] qui trouve un Strouhal de 0,11 pour la même configuration mais avec un Reynolds $Re_s = 520$.

Ces simulations laissent donc penser que cet écoulement n'a pas besoin d'une perturbation pour se déstabiliser. Il est donc logique de penser qu'il existe une zone de stabilité absolue, sans doute dans la zone proche du bord de fuite, là où la composante sillage est la plus influente. On peut donc penser que la composante sillage joue un rôle d'oscillateur pour l'écoulement de couche de mélange.

Nous allons maintenant étudier le même écoulement en 3D. Nous effectuerons une analyse détaillée du champ de vorticité ainsi qu'une analyse statistique des grandeurs fluctuantes de l'écoulement. Enfin, nous réaliserons une étude de stabilité de cet écoulement, sur la base des travaux de Wallace et Redekopp [100].

6.2 La couche de mélange épaisse à $Re_{cm} = 400$

Dans la section précédente, nous avons pu, grâce à un grand nombre de simulations, dégager certaines tendances concernant la dynamique d'un écoulement de couche de mélange épaisse. Dans cette partie, nous allons maintenant étudier une couche de mélange tridimensionnelle. Nous verrons si nos premières conclusions concernant le rôle de la composante sillage sur l'écoulement sont toujours vérifiées. De plus, nous effectuerons un grand nombre de comparaisons avec l'étude expérimentale de Perret [81] malgré la différence sur

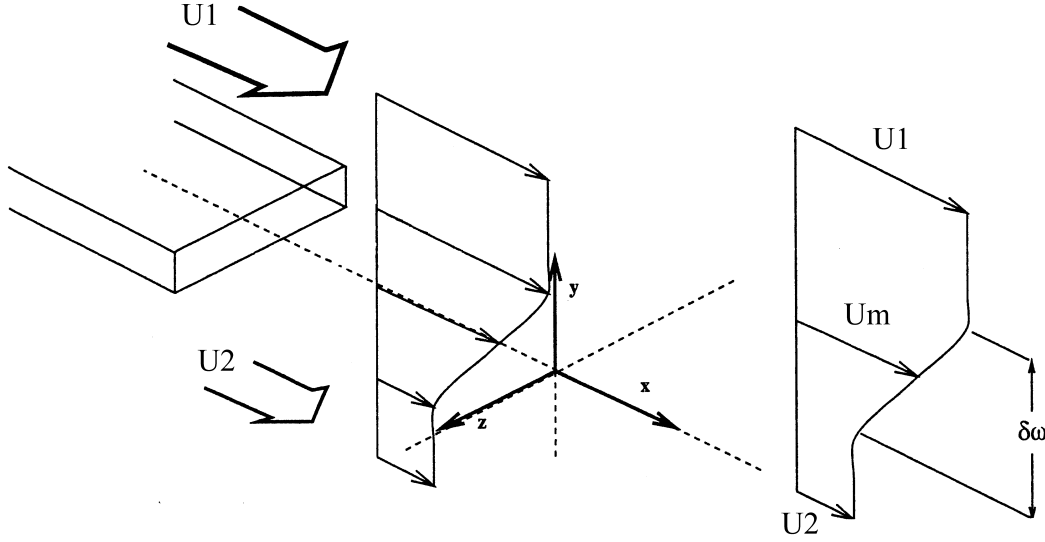


FIG. 6.7 – Configuration de l'écoulement et notations

le nombre de Reynolds et sur la nature des couches limites.

6.2.1 Configuration de l'écoulement

On considère le développement spatial d'une couche de mélange épaisse incompressible créée entre deux écoulements parallèles de vitesses différentes U_1 et U_2 ($U_2 \leq U_1$). Le domaine de calcul, de taille (L_x, L_y, L_z) , et le repère utilisé sont montrés sur la figure (6.8). La direction notée x est la direction longitudinale, la direction y est la direction transversale et la direction z désigne l'envergure de la couche de mélange. L'origine du repère est toujours située au début de la plaque séparatrice ($x = 0$), au milieu du bord de fuite ($y = 0$). La direction notée x est la direction longitudinale, la direction y est la direction transversale et la direction z désigne l'envergure de la couche de mélange.

Le profil moyen de vitesse longitudinal $\langle u_x(y) \rangle$ à l'entrée du domaine est le même que celui utilisé dans les simulations bidimensionnelles.

6.2.2 Paramètres de la simulation

Dans ce chapitre, nous comparons les résultats obtenus pour la couche de mélange épaisse pour une valeur de $r = 0,67$ aux résultats expérimentaux obtenus par Perret [81]. Les paramètres de notre simulation sont donc basés en partie sur les paramètres expérimentaux de Perret [81]. Dans ces expériences, les valeurs des hautes et basses vitesses sont égales respectivement à $U_1 = 35,2 m/s$ et $U_2 = 23,8 m/s$ (pour un rapport de vitesse $r = 0,67$). Pour notre simulation, nous avons $U_1 = 1,2\Delta U$ et $U_2 = 0,8\Delta U$ soit un

paramètre de vitesse $\lambda = 0,20$. Le nombre de Reynolds de couche de mélange chez Perret [81] est égal à 14400 alors que dans notre simulation, il est égal à 400. La perturbation utilisée est une perturbation tridimensionnelle, calculée suivant la méthode décrite dans la partie (2.2). Le domaine de calcul $(L_x \times L_y \times L_z) = (63h \times 96h \times 9h)$ est discrétisé avec $(n_x \times n_y \times n_z) = (561 \times 257 \times 80)$. Nous avons donc choisi une longueur de plaque $l = 10h$. Les épaisseurs de déplacements en entrée de domaine sont respectivement égales à $\delta_1 = 0,0873h$ et $\delta_2 = 0,0768h$.

Une condition de périodicité est appliqué en z . Pour les faces latérales, une condition de glissement libre est utilisée. Enfin, dans la direction longitudinale de l'écoulement des conditions de type entrée/sortie sont prescrites (Voir la figure (6.8)).

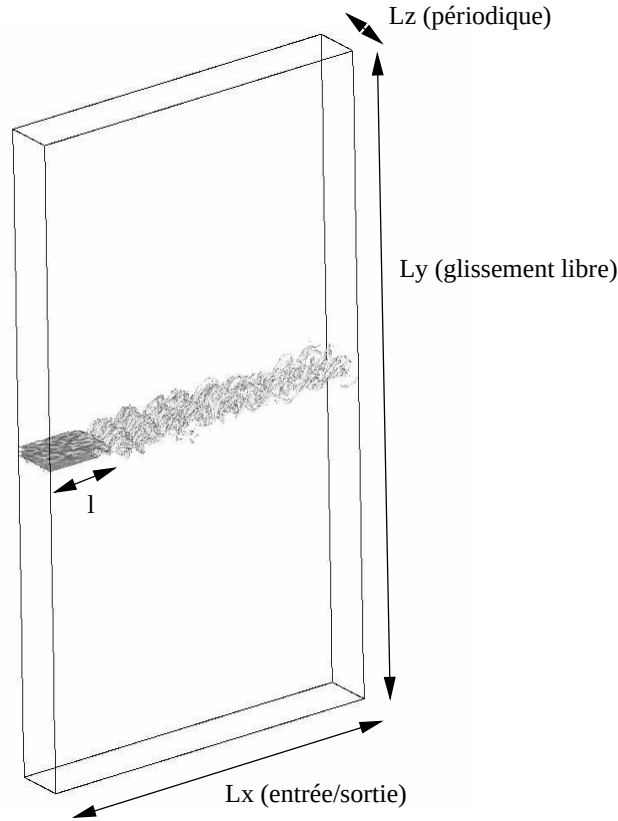


FIG. 6.8 – Vue schématique du domaine de calcul et des conditions aux limites.

Pour la simulation étudiée, après une période de transition où le fluide doit évacuer la condition initiale et qui permet l'établissement d'un écoulement pleinement turbulent, les données statistiques sur la turbulence sont calculées sur une période de temps équivalent à environ 14 lâchers tourbillonnaires. De plus, afin d'améliorer la convergence de nos statistiques, en plus de la moyenne temporelle, nous avons réalisé une moyenne spatiale dans la direction z .

6.2.3 Visualisation des champs instantanés

La figure (6.9) présente des exemples de visualisations instantanées de la vorticité pour notre simulation de couche de mélange épaisse. On observe le développement d'un état turbulent tridimensionnel derrière le bord de fuite. Cet   tat est caractérisé par la présence de structures tourbillonnaires fines et par la présence de tourbillons longitudinaux. On note en particulier que les lâchers tourbillonnaires sont bien parallèles à l'écoulement. Comme pour les simulations bidimensionnelles, on observe une déviation du coté haute vitesse de l'allée de Karman et le passage d'une dynamique de type sillage à une dynamique de type couche de mélange en fin de domaine. Pour cet écoulement, nous avons un nombre de Strouhal égal à 0,22. Perret [81] dans ces investigations expérimentales trouve un Strouhal de 0,24 pour cette configuration. Boldman *et al.* [8] obtiennent un nombre de Strouhal de l'ordre de 0,2. On voit donc que le Strouhal obtenu pour la simulation est en accord avec les valeurs rencontrés dans la littérature.

On remarque la présence des tourbillons longitudinaux étirés en épingle à cheveux dans les zones situées entre deux grosses structures transversales. En fin de domaine, on observe l'enveloppement de ces grosses structures par ces tourbillons en épingles à cheveux (visualisation de dessus).

Si on regarde la figure (6.10) qui compare les deux écoulements considérés, on constate que, à priori, on a un bon accord qualitatif pour les deux écoulements considérés dans la région proche du bord de fuite. Enfin, on peut dire que la condition d'entrée utilisée pour initier la transition dans cette simulation permet de retrouver d'une part les caractéristiques globales d'un écoulement de couche de mélange en fin de domaine (même si nous n'observons pas d'appariements), mais également les mécanismes de transition à la turbulence.

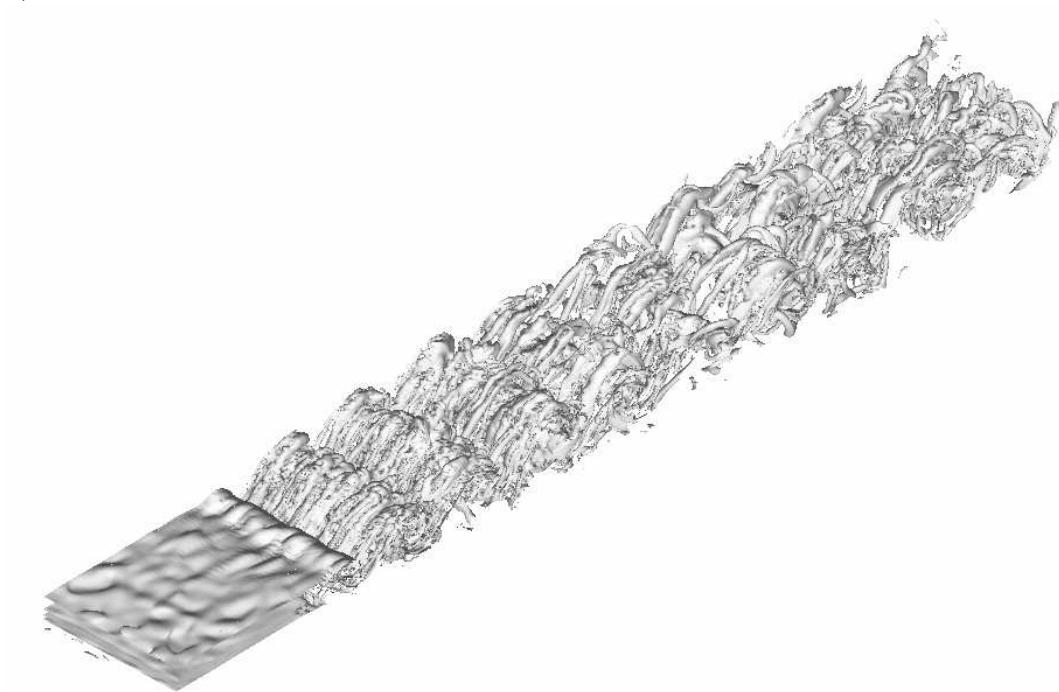
Comme nous venons de le dire, on retrouve en fin de domaine, un écoulement de couche de mélange classique mais sans aucun phénomène d'appariement. Cette tendance était déjà visible dans les simulations bidimensionnelles. Nous avons vu dans le chapitre précédent le rôle essentiel de ce phénomène d'appariement dans l'expansion de la couche de mélange. De ce fait, la couche de mélange simulée ne va pas avoir une croissance aussi importante que chez Perret [81] qui lui a constaté des appariements dans ses investigations.

Afin de confirmer ce désaccord, nous avons par la suite comparé l'évolution longitudinale de l'épaisseur de vorticité. Nous reviendrons donc un peu plus tard dans ce chapitre sur ce point.

6.2.4 Etude statistique

Nous avons effectué une analyse statistique de cet écoulement de couche de mélange épaisse afin de confirmer ces premières conclusions basées sur l'observation du champ de vorticité. Nous comparerons ici nos résultats avec ceux de Perret [81]. Les données statistiques sont calculées sur une période de temps équivalent à environ 14 lâchers tourbillonnaires ce qui représente 16000 itérations avec un pas de temps de $\Delta t = 0,005h/\Delta U$.

a) Vue de profil



b) Vue dans le plan $(x - y)$



c) Vue dans le plan $(x - z)$

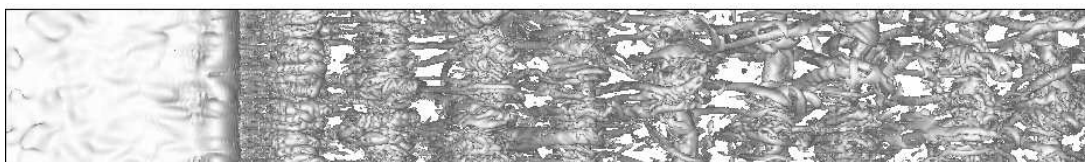


FIG. 6.9 – Iso-surface de la norme de vorticité $\omega_n = 0.75\Delta U/h$ pour la simulation de couche de mélange épaisse.

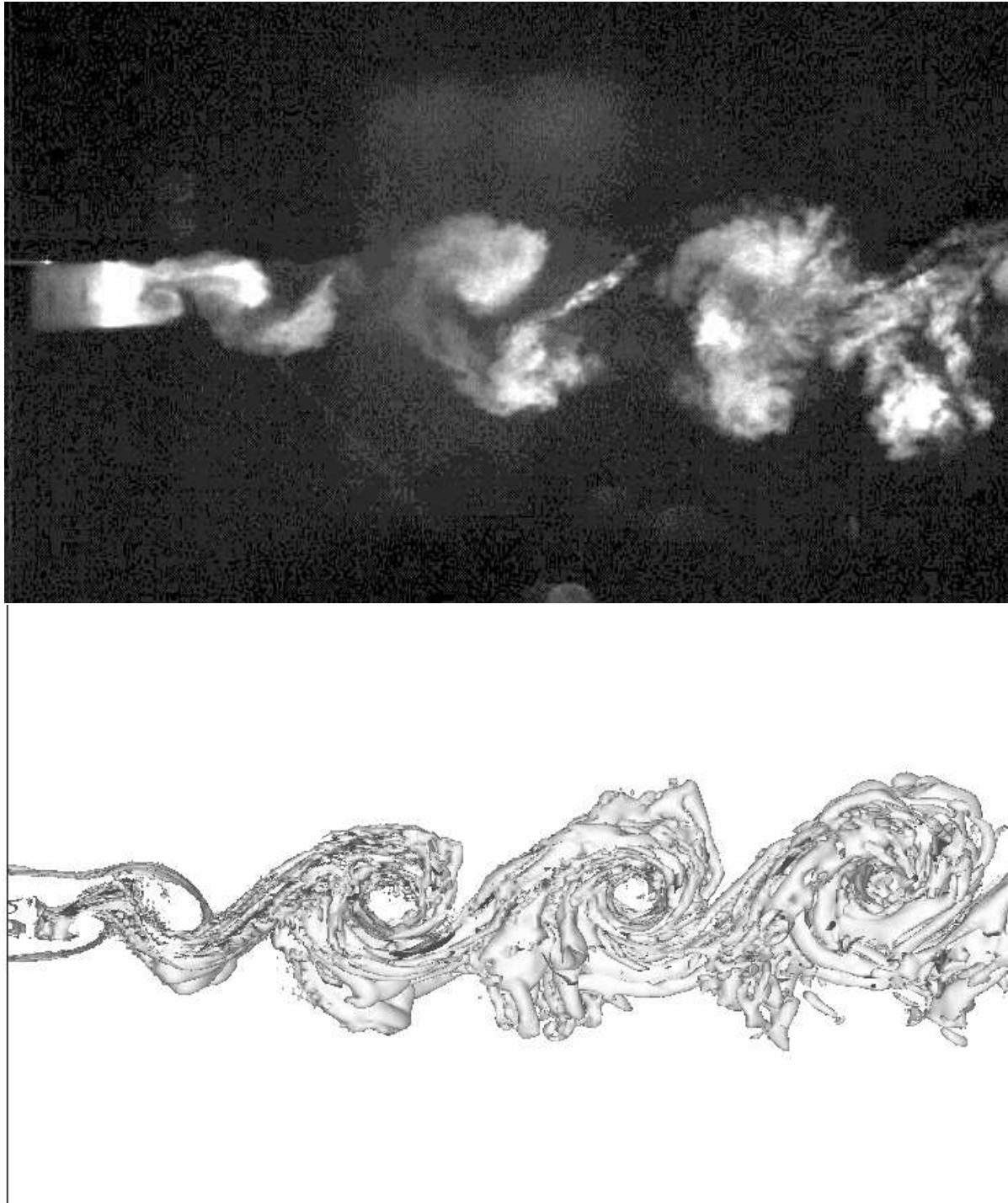


FIG. 6.10 – *En haut : Visualisation instantanées de l'écoulement de [81]. En bas : Iso-surface de vorticité de la simulation considérée $\omega_n = 0.75\Delta U/h$.*

Evolution des profils de vitesse moyenne

Afin d'évaluer l'influence de l'effet de sillage du bord de fuite de la plaque séparatrice sur le développement de l'écoulement, nous avons tracé des profils de vitesse longitudinale moyennée, à différentes positions longitudinales.

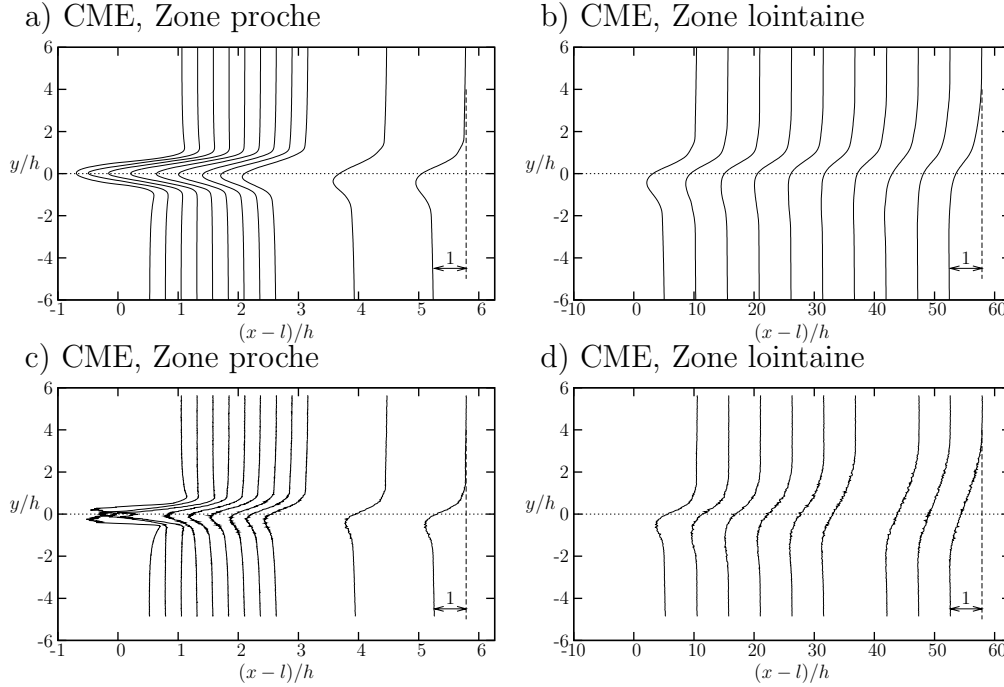


FIG. 6.11 – *Distribution de la vitesse moyenne adimensionnée : a) et b) résultats de notre simulation, c) et d) résultats de Perret [81].*

L'évolution longitudinale des profils moyens de vitesse longitudinale est présentée sur la figure (6.11). On constate l'existence de trois zones.

- une zone très proche du culot, environ pour $x < 1,3h$ chez Perret [81] et $x < 1,8h$ pour notre simulation, dans laquelle on observe une survitesse de part et d'autre de l'axe de l'écoulement. Cette accélération est due à la présence d'une zone de recirculation se développant juste en aval du bord de fuite.
- une zone à vitesse déficitaire, caractéristique du sillage derrière la plaque plane, jusqu'à environ $x = 50h$.
- une zone où on retrouve un profil de couche de mélange classique mais pas encore en régime de similitude.

De plus, on constate que la couche de mélange se développe préférentiellement du côté haute vitesse, confirmant les premières conclusions tirées de l'analyse des champs instantanés. On observe en effet un décalage de l'axe de la couche limite qui a tendance à s'aligner avec le bord supérieur de la plaque séparatrice.

Si on analyse la comparaison des profils de vitesse de la figure (6.12), on remarque clairement que pour notre simulation, l'influence du mode sillage est plus importante, même très loin de la plaque séparatrice (6.12 d) et f)). On observe également que l'épaisseur de

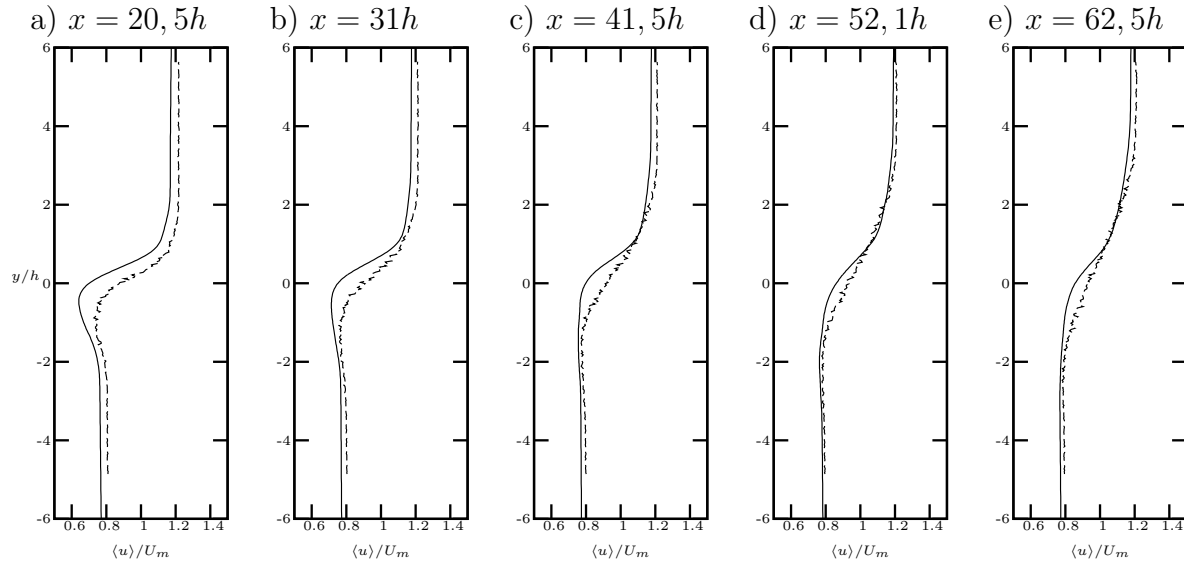


FIG. 6.12 – Comparaison des profils de la vitesse moyenne longitudinale adimensionnée à différentes positions pour notre simulation (traits pleins) et pour les investigations expérimentales de Perret [81] (traits pointillés).

la couche de mélange est beaucoup plus faible pour notre simulation que dans les résultats de Perret [81]. Cela confirme les conclusions des visualisations de la vorticité où aucun appariement n  tait visible pour notre simulation.

Nous allons donc maintenant étudier l  volution longitudinale de l  paisseur de vorticité afin de confirmer le désaccord entre nos résultats et ceux de Perret [81].

Evolution de l  paisseur de vorticité

Afin de caractériser l  volution longitudinale de l  coulement et son épaississement, nous avons tracé l  volution longitudinale de l  paisseur de vorticité définie par

$$\delta_\omega(x) = \frac{\Delta U}{|\partial \langle u_x(x) \rangle / \partial y|_{max}} \quad (6.16)$$

L  volution de l  paisseur de vorticité pour les deux écoulements est présentée sur la figure (6.13). Comme le laissait penser les visualisations de la vorticité (absence d  appariements dans la simulation) et l  tude statistique de la vitesse moyenne adimensionnée, on remarque une plus faible croissance du taux d  expansion de notre simulation que chez Perret [81].

La pente obtenue par Perret [81] est de $d\delta_\omega/dx = 0,0684$. Pour notre simulation, la pente est de $d\delta_\omega/dx = 0,0241$. Perret [81] justifie cette croissance importante par la présence d  une zone d  instabilit   absolue dans la zone près du bord de fuite épais. Cette zone qui agit comme un oscillateur de l  coulement contribuerait à un accroissement plus important de la couche de mélange. Dans nos investigations, nous verrons dans la prochaine section que nous aussi nous retrouvons bien cette zone de stabilité absolue

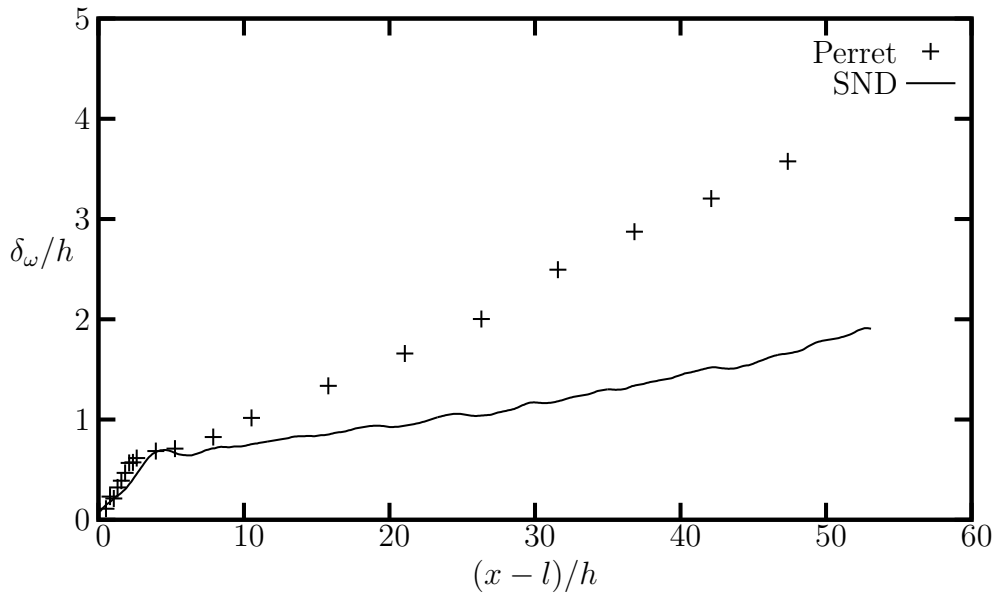


FIG. 6.13 – *Evolution longitudinale de l'épaisseur de vorticité.*

sans toute fois retrouver le niveau de croissance de la couche de mélange de Perret [81]. Nous pensons plutôt que c'est la présence ou non des appariements qui est responsable de l'accroissement de l'épaisseur de vorticité.

A ce point, nous avançons trois hypothèses pour expliquer la différence de comportement de la couche de mélange entre notre simulation et les investigations expérimentales de Perret [81]. Tout d'abord, l'absence dans nos simulations d'appariements pourrait s'expliquer par le faible nombre de Reynolds (Reynolds de couche de mélange) que nous utilisons pour la simulation puisque ce nombre est 36 fois plus petit que celui utilisé par Perret [81]. Ensuite, cette absence peut se justifier par la nature des conditions aux limites qui sont laminares pour la simulations et pleinement turbulentes chez Perret [81]. Enfin, il est aussi tout à fait possible qu'il y ait eu des effets de bords dans la soufflerie étant donnée la petite taille de la veine d'essais.

Nous allons maintenant effectuer une petite étude de stabilité à partir des travaux de Wallace et Redekopp [100] afin de confirmer l'existence d'une zone de stabilité dans la région proche du bord de fuite.

Etude de stabilité sur la base des travaux de Wallace et Redekopp [100]

Les profils moyens de vitesse longitudinale obtenus permettent de calculer le déficit de vitesse local sans dimension

$$\mathbf{f} = (U_m - U_{min})/U_m \quad (6.17)$$

afin de déterminer, grâce aux diagrammes de Wallace et Redekopp [100], la nature de l'instabilité locale, en terme de stabilité linéaire.

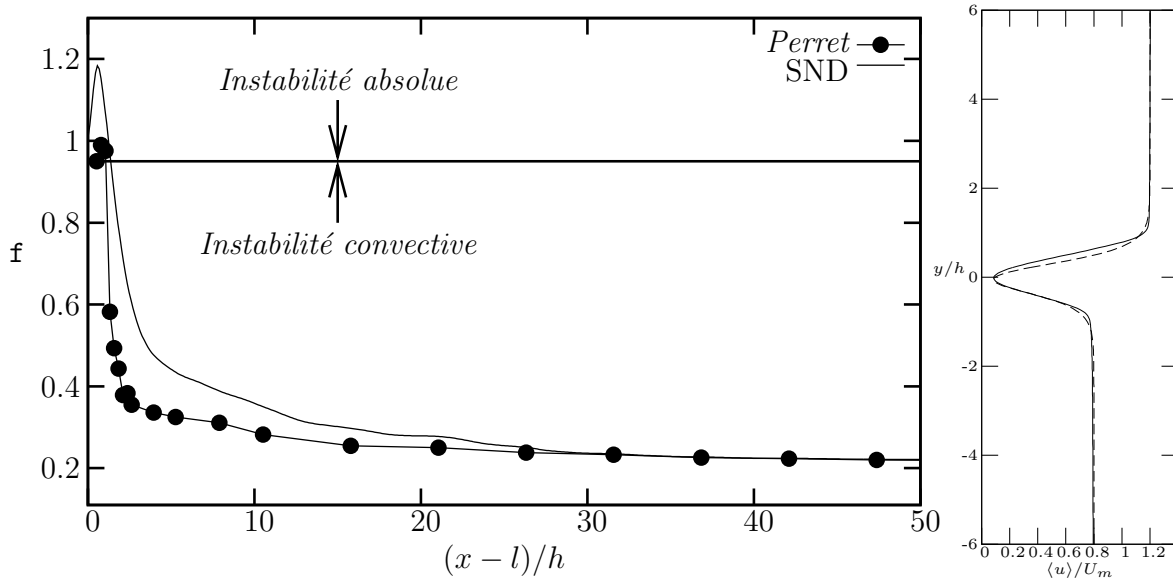


FIG. 6.14 – Evolution longitudinale du déficit de vitesse $\mathbf{f} = (U_m - U_{min})/U_m$ (paramètre de vitesse $\lambda = 0, 20$)

Ces auteurs proposent de modéliser le profil moyen de vitesse par une fonction du type

$$\langle u(y) \rangle = 1 - \mathbf{f} \operatorname{sech}^2(y) + \lambda \tanh(y) \quad (6.18)$$

avec λ qui est le paramètre de vitesse de la couche de mélange. Le schéma de droite de la figure (6.14) montre que cette fonction modélise le profil de vitesse de la simulation pour $\mathbf{f} = 0,95$. L'évolution longitudinale de $\mathbf{f}$ est présentée sur la figure (6.14). Le résultat obtenu montre plusieurs choses

- L'important déficit de vitesse dû au bord de fuite droit de la plaque séparatrice entraîne l'apparition d'une zone d'instabilité absolue s'étendant jusqu'à $x \simeq 1,2h$ pour notre simulation.
- On constate aussi le bon accord entre notre simulation et les investigations de Perret [81] puisque sa zone de stabilité s'étend jusqu'à $x \simeq h$
- Pour le reste de l'écoulement, on a affaire à une instabilité convective

On peut donc dire que pour cet écoulement, il existe une zone d'instabilité absolue dans la région proche du bord de fuite qui joue le rôle d'un oscillateur pour le reste de l'écoulement. Les perturbations sont ensuite amplifiées (zone d'instabilité convective) pour donner naissance à un état turbulent de couche de mélange classique en fin de domaine.

Moments d'ordre deux

Nous avons ensuite calculés les tensions de Reynolds normalisées par le carré de la différence de vitesse $\langle u^2 \rangle / \Delta U^2$, $\langle v^2 \rangle / \Delta U^2$, $\langle w^2 \rangle / \Delta U^2$, $\langle uv \rangle / \Delta U^2$. Les résultats sont présentés sur la figure (6.15). Dans cette configuration d'écoulement, l'amplitude des extrema

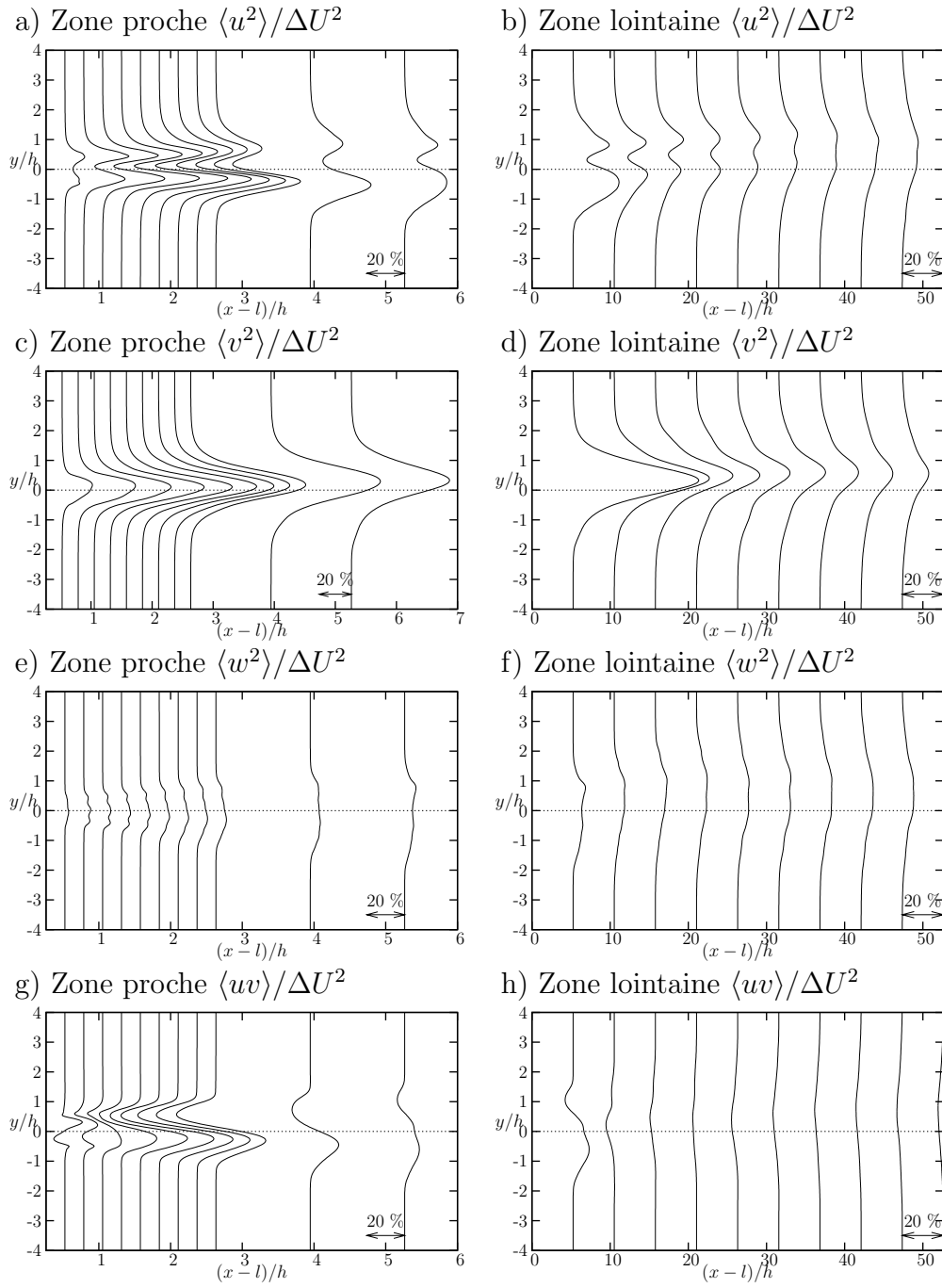
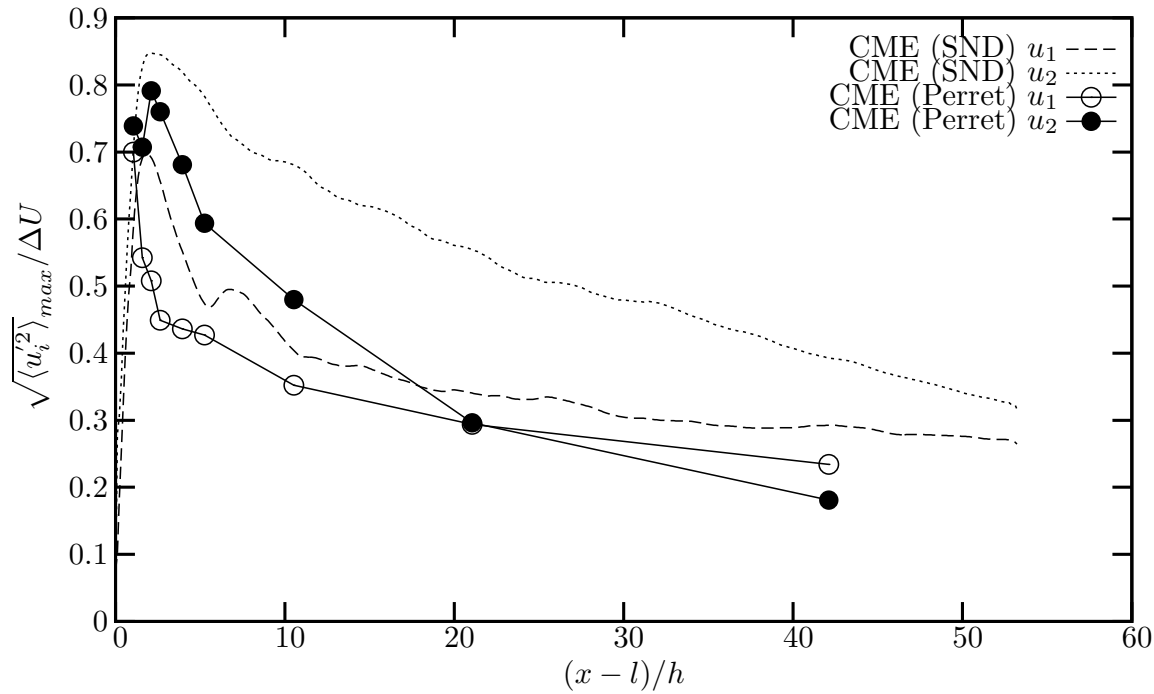


FIG. 6.15 – Evolution longitudinale des tensions de Reynolds.

FIG. 6.16 – *Evolution longitudinale des maxima des tensions de Reynolds.*

de chacun des profils évolue continuellement au cours du développement aval de l'écoulement. Comme on peut le constater, le régime de similitude n'est pas atteint pour les grandeurs fluctuantes sur notre domaine de calcul. On peut dire en effet que dans cet écoulement, on observe des fluctuations importantes sur ces tensions de Reynolds.

Le profil de $\langle u^2 \rangle / \Delta U^2$ présente deux extrema qui disparaissent plus en aval autour de $x = 35h$. Le même type d'évolution est visible sur les profils de la tension croisée $\langle uv \rangle / \Delta U^2$. Dans la zone proche du bord de fuite, les profils présentent un extremum positif du côté basse vitesse et un extremum négatif du côté haute vitesse. Plus en aval, cette grandeur ne présente plus qu'un seul extremum négatif. Une particularité de cette simulation est le niveau de fluctuation de la composante verticale v qui est beaucoup plus importante (d'un facteur deux environ) que chez Perret [81]. Ceci confirme le fait que notre écoulement est plus bidimensionnel (absence d'appariements). En revanche, l'évolution longitudinale de la composante $\langle w^2 \rangle / \Delta U^2$ est beaucoup moins marquée.

On constate aussi clairement la déviation vers le côté haute vitesse de l'écoulement comme observée sur le champ de vorticité. L'analyse de ces tensions de Reynolds montre que l'écoulement est fortement marqué par la composante sillage de la plaque de séparation. De plus, elle confirme l'existence d'une zone dans laquelle l'écoulement est dominé par l'effet de sillage. Plus en aval, vers la fin du domaine, l'écoulement se rapproche d'un écoulement de type couche de mélange.

La figure (6.16) présente la comparaison entre l'évolution longitudinale des maxima des tensions de Reynolds pour les résultats de Perret [81] et pour notre simulation. On observe

dans les deux cas une décroissance de ces maxima même si les valeurs sont plus importantes pour la simulation. De plus, on constate que le maxima de fluctuation de la composante verticale v reste assez important pour la simulation et qu'il reste plus important que le maxima de fluctuation de la tension $\langle u^2 \rangle / \Delta U^2$. On observe une tendance inverse pour les résultats de Perret [81]. Le régime de similitude n'est pas atteint dans les deux cas sur le domaine considéré.

6.2.5 Synthèse et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons donc étudié un écoulement de couche de mélange épaisse dont la principale caractéristique est d'avoir une composante de type sillage prononcée au niveau de bord de fuite. Nous avons pu mettre en évidence l'influence de cette composante sur la dynamique de l'écoulement dans nos visualisations de la vorticité et dans notre analyse statistique de l'évolution de la vitesse moyenne. La présence d'une zone de stabilité absolue a été montr e sur la base des travaux de Wallace et Redekopp [100].

Nous avons effectué dans ce chapitre un grand nombre de comparaison avec les investigations expérimentales de Perret. Malgré la différence importante de Reynolds et la nature différente des couches limites, nous avons pu trouver quelques points communs dans nos résultats.

Dans la région proche du bord de fuite, on a pu constaté en effet un très bon accord pour l'évolution de la couche de mélange, pour la détection de la zone d'instabilité absolue et pour la restitution du champ de vorticité avec un écoulement fortement marqué par la composante de sillage.

En revanche, le principal point de désaccord concerne d'une part les grandeurs fluctuantes de l'écoulement, notamment la composante $\langle v^2 \rangle / \Delta U^2$ qui deux fois plus importante dans notre simulation et d'autre part le phénomène d'appariement, présent chez Perret [81] et absent dans la simulation. Nous avons avancé plusieurs hypothèses pour expliquer ces désaccords et il faudra attendre le résultat de SGE à plus haut Reynolds avec des couches limites turbulentes pour en savoir un peu plus.

Nous pouvons quand même dire au vu de cette simulation que le code de calcul que nous avons développé pendant cette thèse a donné entière satisfaction puisque nous avons pu mené à bien cette simulation tridimensionnelle d'une couche de mélange épaisse avec la prise en compte des parois. Nous allons maintenant rajouté un profil biseauté à la plaque séparatrice dans le but d'essayer de simuler un écoulement de couche de mélange classique.

Chapitre 7

La couche de mélange classique

Après avoir étudié dans le chapitre précédent une couche de mélange épaisse, nous allons dans ce chapitre étudier un écoulement de couche de mélange classique en ajoutant un profil biseauté au bord de fuite droit de la plaque séparatrice. Nous allons ainsi pouvoir étudier l'influence de la géométrie du bord de fuite sur l'écoulement de couche de mélange.

Ce chapitre est articulé de la même façon que le chapitre précédent. Dans un premier temps, nous avons effectué des calculs préliminaires dans le but de déterminer l'angle d'inclinaison du profil biseauté. En effet, nous avons cherché à éviter tout phénomène de décollement au niveau du profil biseauté. Cependant, comme nous travaillons à Reynolds $Re_{cm} = 400$ avec des couches limites laminaires et que les investigations expérimentales de Perret [81] ont été réalisées à Reynolds $Re_{cm} = 14400$ avec des couches limites turbulentes, on peut s'attendre à avoir un profil très biseauté pour le bord de fuite.

Nous avons aussi cherché à quantifier l'influence d'une perturbation dans la condition d'entrée sur la dynamique de l'écoulement. Comme l'écoulement de couche de mélange classique est convectivement instable, il devrait y avoir des différences entre les simulations avec perturbations et les simulations sans perturbations. Enfin, nous avons aussi fait une petite étude sur l'influence du rapport de vitesse r sur la dynamique de l'écoulement.

Dans un second temps, à partir des résultats des simulations précédentes, nous avons mené une *SND* tridimensionnelle pour un nombre de Reynolds $Re_{cm} = 400$. Nous avons effectué des visualisations instantanées de l'écoulement puis nous avons entrepris une analyse statistique de nos résultats dans le but d'essayer de réaliser des comparaisons avec les résultats expérimentaux de Perret [81]. Nous avons aussi effectué des comparaisons avec la simulation de couche de mélange épaisse. A noter encore une fois que les simulations sont réalisées avec un Reynolds $Re_{cm} = 400$ et avec des couches limites laminaires, c'est pourquoi nous ne pouvons attendre qu'un accord qualitatif avec les investigations expérimentales de Perret [81].

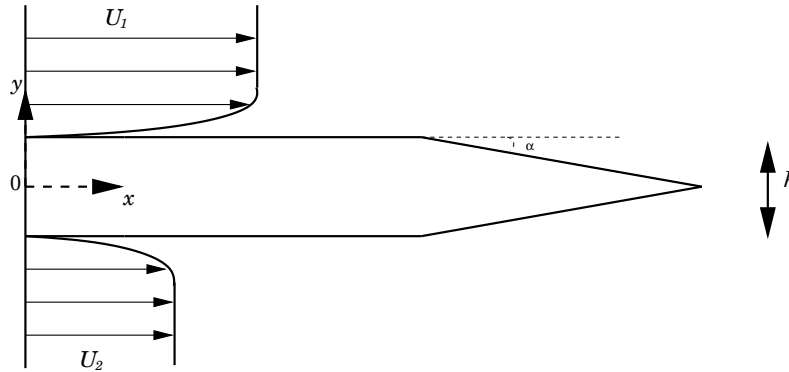


FIG. 7.1 – Configuration de l'écoulement.

7.1 Calculs préliminaires

7.1.1 Configuration de l'écoulement

L'écoulement étudié ici est le même que celui du chapitre précédent. Seule la géométrie de la plaque séparatrice change puisque au bord de fuite de type culot, on ajoute un profil biseauté. Ainsi, nous avons pu étudier l'influence de la géométrie du bord de fuite sur le développement d'une couche de mélange. L'écoulement étudié ici est décrit sur la figure (7.1). On considère le développement spatial d'une couche de mélange classique incompressible créée entre deux écoulements parallèles de vitesses différentes U_1 et U_2 ($U_2 \leq U_1$) sur un domaine de taille (L_x, L_y) . La plaque séparatrice est d'épaisseur h et de longueur L variable (dépendante de l'angle α). Les couches limites sont d'épaisseur de déplacement respectives δ_1 et δ_2 . L'angle α est choisi de manière à éviter tout décollement du fluide sur le bord biseauté. Dans ses investigations expérimentales, Perret [81] a utilisé un profil biseauté avec un angle de 12° . Nous avons déjà déterminé dans le chapitre précédent l'épaisseur de déplacement des couches limites en entrée δ_1 ($\delta_1 = 0.0873h$) et δ_2 ($\delta_2 = 0.0768h$).

Il reste donc à trouver le bon angle pour éviter tout décollement et évaluer l'influence d'une perturbation en condition d'entrée sur l'écoulement. En effet, comme nous l'avons vu dans le chapitre 5, l'écoulement de couche de mélange classique est convectivement instable et est donc très sensible à la nature de la condition d'entrée. Enfin, nous avons aussi mené des simulations avec un rapport de vitesse r variable pour évaluer son influence sur la dynamique de l'écoulement.

Simulation	(L_x, L_y)	(n_x, n_y)	Δt	U_1	U_2	α	Re_{cm}
CMCa 1	$(63h, 96h)$	$(561, 257)$	$0,005h/\Delta U$	1,2	0,8	12	400
CMCa 2	$(63h, 96h)$	$(561, 257)$	$0,005h/\Delta U$	1,2	0,8	6	400
CMCa 3	$(63h, 96h)$	$(561, 257)$	$0,005h/\Delta U$	1,2	0,8	4	400
CMCa 4	$(63h, 96h)$	$(561, 257)$	$0,005h/\Delta U$	1,2	0,8	3	400

TAB. 7.1 – Paramètres des simulations en couche de mélange classique bidimensionnelle pour la détermination de l'angle α .

7.1.2 Détermination de l'angle du profil biseauté

Dans cette partie, nous avons réalisé plusieurs simulations, dans le but de déterminer l'angle α du profil biseauté. Nous avons réalisé une série de quatre simulations avec respectivement $\alpha = 12, 6, 4$ et 3 degrés. Les paramètres des simulations sont présentés sur le tableau (7.1).

Nous avons choisi de visualiser la vorticité afin d'observer un éventuel décollement au niveau du bord de fuite biseauté. Les résultats sont présentés sur la figure (7.2). On observe clairement pour un angle $\alpha = 12^\circ$ un fort décollement des couches limites. Ce résultat était attendu dans la mesure où nos simulations sont réalisées avec des couches limites laminaires de type Blasius alors que Perret [81] utilise des couches limites turbulentes. Un décollement est encore perceptible pour $\alpha = 6^\circ$ et 4° . En effet, on remarque que, pour $\alpha = 6^\circ$, la couche limite se décolle dès le milieu du profil biseauté. En revanche, on constate que pour un angle de trois degrés, la couche limite est en adhérence complète   la paroi du bord de fuite. Pour nos simulations de couche de mélange classique, nous avons donc choisi d'utiliser un profil biseauté avec un angle $\alpha = 3^\circ$ de manière à éviter tout décollement. Un tel angle conduit à une longueur de plaque d'envi on $L = 20h$. L'inconvénient est que la plaque séparatrice est beaucoup plus longue que celle utilisée par Perret [81] puisque dans nos simulations, elle occupe envi on un tiers du domaine de calcul.

7.1.3 Influence de la condition d'entrée sur la dynamique de l'écoulement

Le développement de l'écoulement de couche de mélange classique est sensible à la nature des conditions d'entrée lui donnant naissance. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 5, de nombreux paramètres peuvent influencer l'organisation spatio-temporelle de l'écoulement. Dans cette partie, nous nous sommes intéressé à l'influence d'une perturbation dans la condition d'entrée du domaine. Nous avons vu que dans le cas d'une couche de mélange épaisse, une telle perturbation n'avait qu'une incidence mineure sur la dynamique de l'écoulement. Nous avons donc entrepris les mêmes simulations que dans le cas d'une couche de mélange épaisse afin d'évaluer les répercussions d'une perturbation dans la condition d'entrée sur l'écoulement. Les paramètres des simulations sont présentés dans le tableau (7.2).

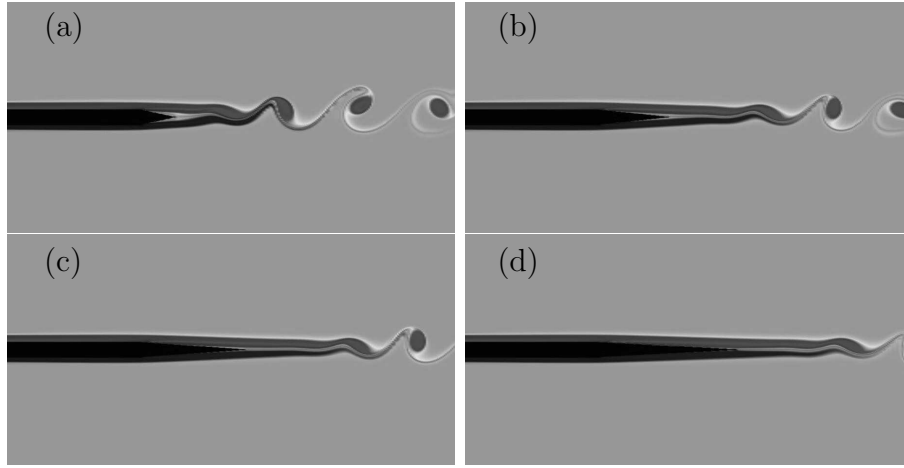


FIG. 7.2 – Iso-contours de vorticité : a) CMCa 1, b) CMCa 2, c) CMCa 3 et d) CMCa 4.

Simulation	(L_x, L_y)	(n_x, n_y)	Δt	U_1	U_2	f_p	Re_{cm}
$CMCp_{ref}$	$(63h, 96h)$	$(561, 257)$	$0,005h/\Delta U$	1,2	0,8	0	400
$CMCp\ 1$	$(63h, 96h)$	$(561, 257)$	$0,005h/\Delta U$	1,2	0,8	0,0125	400
$CMCp\ 2$	$(63h, 96h)$	$(561, 257)$	$0,005h/\Delta U$	1,2	0,8	0,025	400
$CMCp\ 3$	$(63h, 96h)$	$(561, 257)$	$0,005h/\Delta U$	1,2	0,8	0,05	400

TAB. 7.2 – Paramètres des simulations en couche de mélange classique bidimensionnelle pour déterminer l'influence de la perturbation sur la condition d'entrée

Comme pour la couche de mélange épaisse, nous avons choisi de visualiser la vorticité pour déterminer l'influence de la perturbation dans la condition d'entrée. Les visualisations sont présentées sur la figure (7.4). Nous avons effectué une première simulation de référence sans aucune perturbation. Comme on peut le constater, cette simulation ne donne pas un écoulement réaliste. En effet, l'écoulement, après une longue période pendant laquelle la condition initiale est évacuée, se laminarise. On observe cependant en fin de domaine des tourbillons de Kelvin Helmholtz. La présence de ces tourbillons est due uniquement à une erreur numérique causée par les conditions d'entrée/sortie utilisée dans le code [41]. L'erreur générée en sortie est alors convectée en amont du domaine ce qui entraîne une perturbation dans l'écoulement et permet ainsi l'apparition des tourbillons de Kelvin-Helmholtz. L'écoulement, entièrement conditionné par ce mécanisme artificiel, ne peut donc pas être réaliste.

En revanche, l'écoulement avec une perturbation dans la condition d'entrée est plus en accord avec les résultats issus de la littérature. Les tourbillons de Kelvin-Helmholtz apparaissent beaucoup plus en aval que dans le cas sans perturbation. De plus, on peut

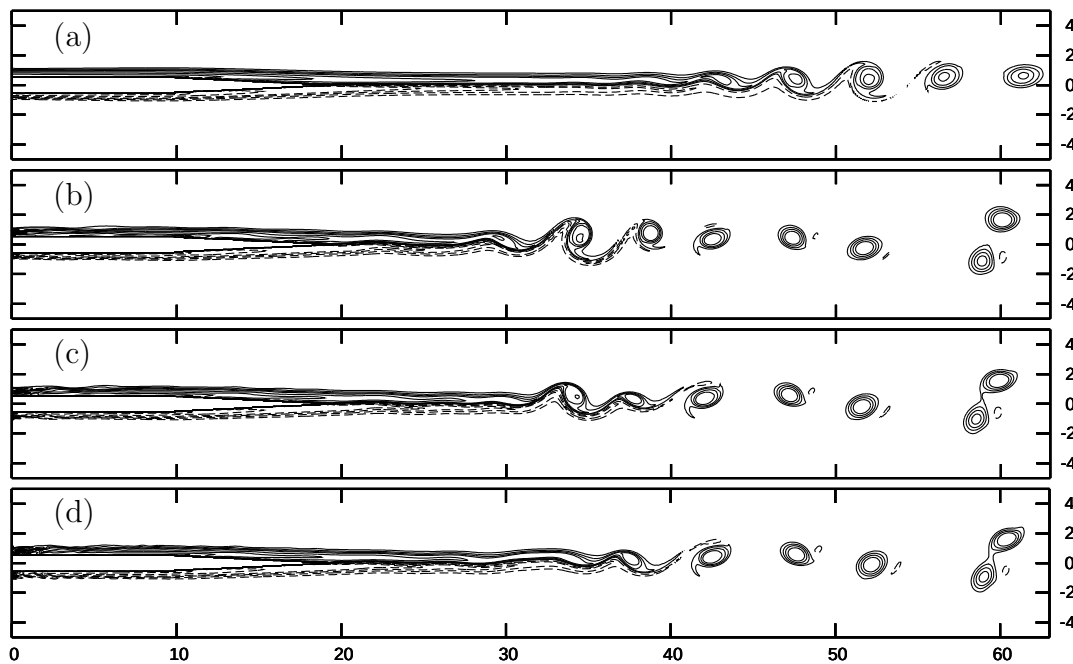


FIG. 7.3 – Iso-contours de vorticité (— : vorticité positive, $\cdots$: vorticité négative) : a) $CMCp_{ref}$, b) $CMCp$ 1, c) $CMCp$ 2 et d) $CMCp$ 3.

observer un appariement en fin de domaine. La fréquence de la perturbation modifie la localisation longitudinale du début du déclenchement des tourbillons. Plus la fréquence est élevée, plus le déclenchement des tourbillons semble retardé sans changer pour autant la dynamique de la couche de mélange. On remarque enfin dans cet écoulement que l'influence de la composante sillage est très limitée contrairement à l'écoulement de la couche de mélange épaisse.

7.1.4 Influence du rapport de vitesse r

Dans cette partie, nous cherchons à mesurer l'influence du rapport de vitesse sur la dynamique de l'écoulement. Comme pour la couche de mélange classique, nous avons dans un premier temps réalisé une simulation de référence, sans aucune perturbation en condition d'entrée, avec un rapport de vitesse $r = 1$. Dans le but de déterminer l'influence du rapport de vitesse sur l'écoulement nous avons ensuite réalisé deux simulations avec rapports de vitesse $r = 0,83$ et $r = 0,67$ sans aucune perturbation en entrée puis nous avons refait ces simulations mais avec une perturbation dans la condition d'entrée. Les paramètres des simulations sont donnés dans le tableau (7.3).

La figure (7.4) présente le champ de vorticité des six simulations. On retrouve les mêmes conclusions que pour la couche de mélange épaisse. Pour une augmentation du déficit de vitesse, on observe la disparition progressive des tourbillons coté basse vitesse. En revanche, l'axe de la couche limite ne semble pas se décaler du coté haute vitesse comme pour la couche de mélange épaisse. De plus, l'influence de la composante sillage est moins

Simulation	(L_x, L_y)	(n_x, n_y)	Δt	U_1	U_2	f_p	Re_s
$CMCr_{ref}$	$(63h, 96h)$	$(561, 257)$	$0,005h/\Delta U$	1,2	1,2	0	1000
$CMCr\ 1$	$(63h, 96h)$	$(561, 257)$	$0,005h/\Delta U$	1,2	1	0	1000
$CMCr\ 2$	$(63h, 96h)$	$(561, 257)$	$0,005h/\Delta U$	1,2	0,8	0	1000
$CMCr\ 3$	$(63h, 96h)$	$(561, 257)$	$0,005h/\Delta U$	1,2	1,2	0.0125	1000
$CMCr\ 4$	$(63h, 96h)$	$(561, 257)$	$0,005h/\Delta U$	1,2	1	0.025	1000
$CMCr\ 5$	$(63h, 96h)$	$(561, 257)$	$0,005h/\Delta U$	1,2	0,8	0.05	1000

TAB. 7.3 – Paramètres des simulations en couche de mélange classique bidimensionnelle pour déterminer l’influence du rapport de vitesse λ sur l’écoulement.

visible sur le champ de vorticité. La présence ou non d’une perturbation dans la condition d’entrée modifie en profondeur la dynamique de l’écoulement pour les trois rapports de vitesse considéré. Cependant, on peut tirer les mêmes conclusions que pour les tests sans perturbation (disparition progressive des tourbillons coté basse vitesse, changement de la nature du mode dominant). Ceci confirme les conclusions de Wallace et Redekopp [100] qui ont montré qu’une diminution du rapport de vitesse r entraîne une diminution de l’étendue longitudinale de la région d’instabilité absolue qui se caractérise par une diminution de l’influence de la composante sillage sur l’écoulement de couche de mélange.

7.2 La couche de mélange classique à $Re_{cm}400$

Dans la partie précédente, nous avons déterminé l’angle du profil biseauté et la longueur de la plaque. Nous avons vu la nécessité d’utiliser une perturbation dans la condition d’entrée pour avoir un écoulement réaliste. Dans cette partie, nous allons étudier le développement d’une couche de mélange classique à Reynolds $Re_{cm} = 400$. Nous verrons si nous arrivons à obtenir un écoulement réaliste avec la plaque séparatrice biseautée et nous effectuerons des comparaisons avec les résultats de Perret [81].

7.2.1 Configuration de l’écoulement

On considère le développement spatial d’une couche de mélange épaisse incompressible crée entre deux écoulements parallèles de vitesses différentes U_1 et U_2 ($U_2 \leq U_1$). Le domaine de calcul, de taille (L_x, L_y, L_z) , et le repère utilisé sont montrés sur la figure (7.5). L’origine du repère est toujours située au début de la plaque séparatrice ($x = 0$), au milieu du bord de fuite ($y = 0$). La direction notée x est la direction longitudinale, la direction y est la direction transversale et la direction z désigne l’envergure de la couche de mélange.

Le profil moyen de vitesse longitudinal $\langle u_x(y) \rangle$ à l’entrée du domaine est le même que celui utilisé dans la simulation de couche de mélange épaisse.

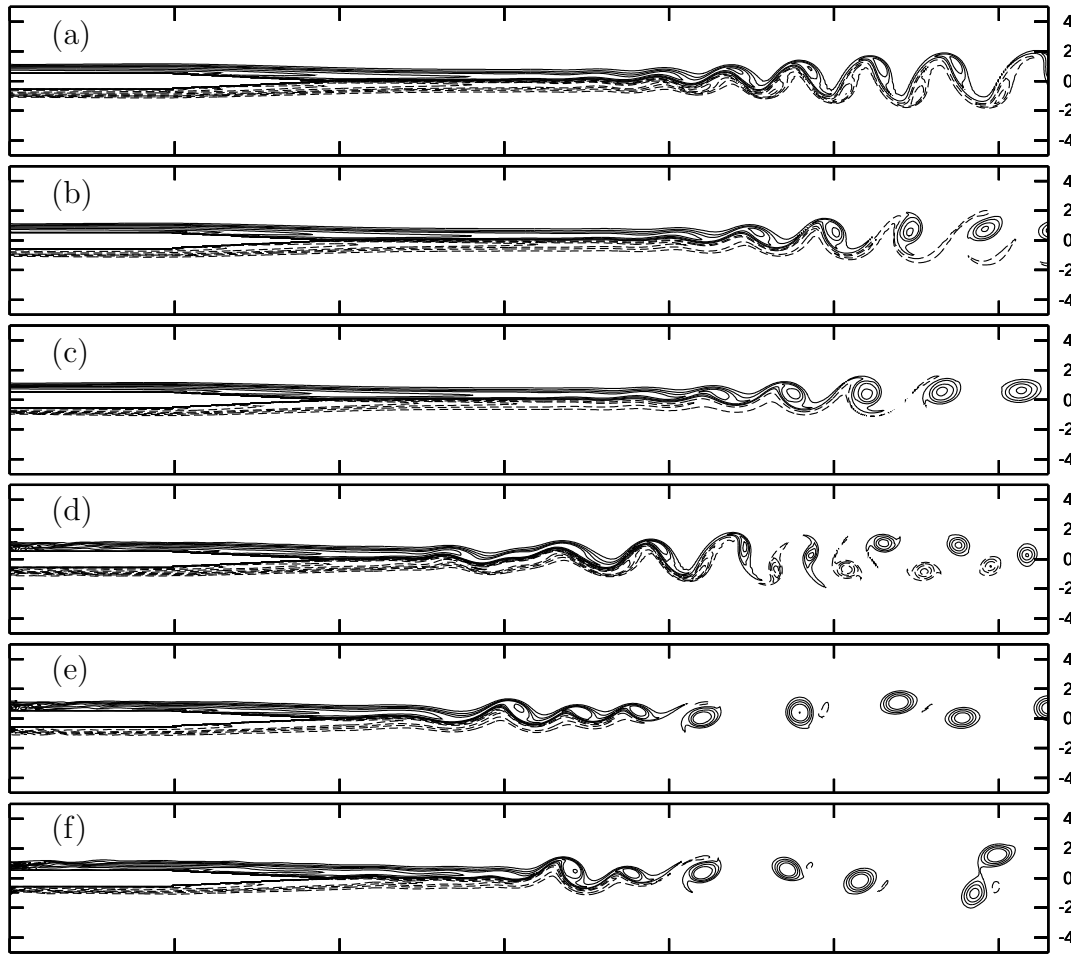


FIG. 7.4 – Iso-contours de vorticité (— : vorticité positive, ··· : vorticité négative) : a) $CMCr_{ref}$, b) $CMCr$ 1, c) $CMCr$ 2, d) $CMCr$ 3, e) $CMCr$ 4 et f) $CMCr$ 5.

7.2.2 Paramètres des simulations

Dans cette partie, nous comparerons les résultats obtenus pour la couche de mélange classique pour une valeur de $r = 0,67$ aux résultats expérimentaux obtenus par Perret [81]. Les paramètres de notre simulation sont donc basés en partie sur les paramètres expérimentaux de Perret [81]. Ils sont identiques à ceux de la simulation menée pour la couche de mélange. Nous avons $U_1 = 1,2\Delta U$ et $U_2 = 0,8\Delta U$ soit un paramètre de vitesse $\lambda = 0,20$. Le nombre de Reynolds de couche de mélange est toujours égal à 400. La perturbation utilisée est une perturbation tridimensionnelle, calculée suivant la méthode décrite dans la partie (2.2). Le domaine de calcul $(L_x \times L_y \times L_z) = (63h \times 96h \times 9h)$ est discrétisé avec $(n_x \times n_y \times n_z) = (561 \times 257 \times 80)$. Nous avons donc une longueur de plaque $L = 20h$ avec un profil incliné de trois degré. Les épaisseurs de déplacements ainsi que le jeu de conditions aux limites sont identiques à celles de la simulation en couche de mélange épaisse (voir la figure (6.8)).

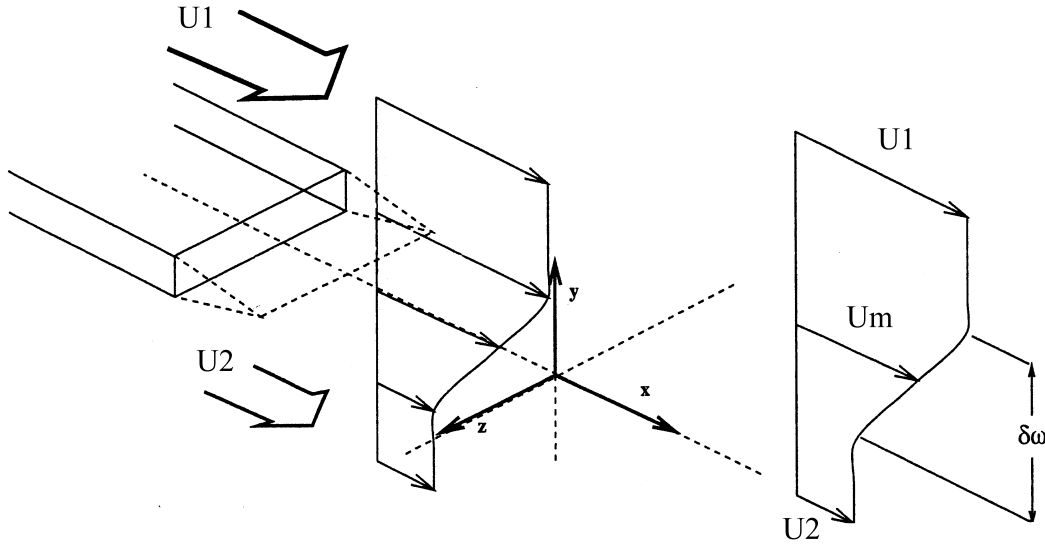


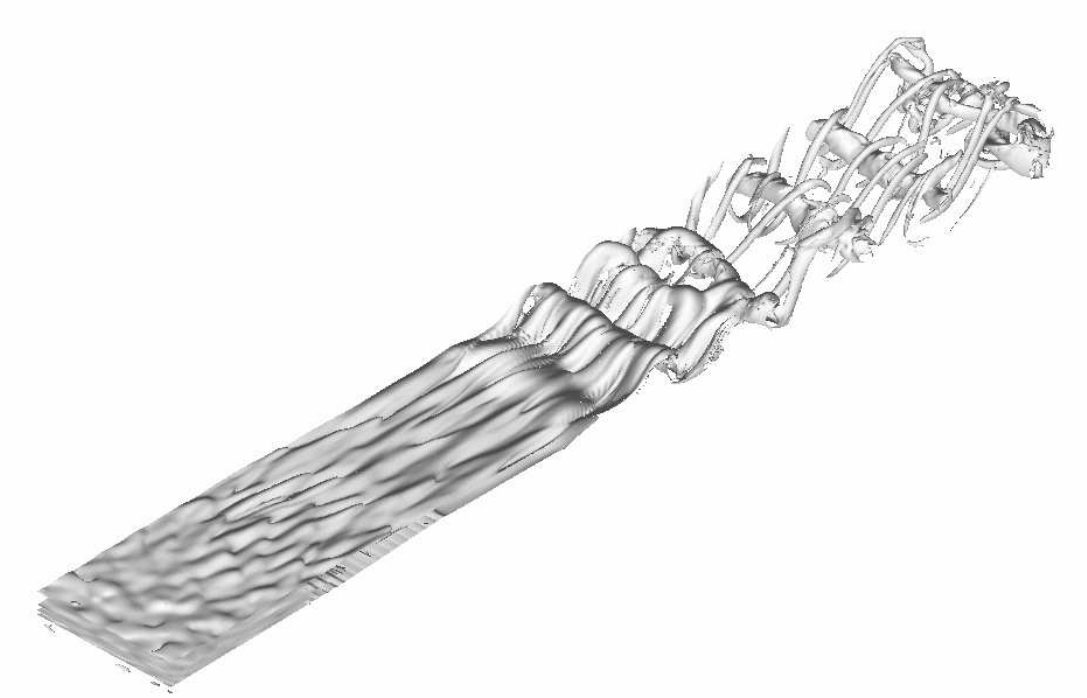
FIG. 7.5 – Configuration de l'écoulement et notations

Pour la simulation étudiée, après une période de transition où le fluide doit évacuer la condition initiale et qui permet l'établissement d'un écoulement pleinement établi, les données statistiques sur la turbulence sont calculées sur une période de temps équivalent à environ 14 lâchers tourbillonnaires. De plus, afin d'améliorer la convergence de nos statistiques, en plus de la moyenne temporelle, nous avons réalisé une moyenne spatiale dans la direction z .

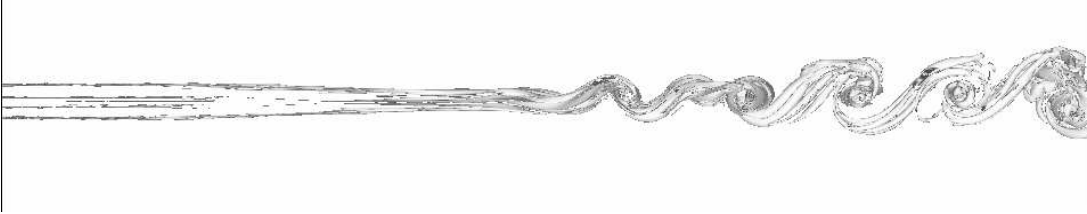
7.2.3 Visualisation des champs instantanés

Les visualisations de la figure (7.6) nous montre clairement une dynamique tridimensionnelle pour cet écoulement. On observe l'oscillation de l'interface entre les deux écoulements après la plaque séparatrice, puis la formation des tourbillons de type Kelvin Helmholtz. Cependant, le domaine de calcul semble trop court pour pouvoir observer un état pleinement turbulent. De plus, on observe une période de transition assez longue juste après le bord de fuite avant l'apparition des tourbillons de Kelvin-Helmholtz. On observe également des tourbillons légèrement déformés suivant l'envergure, phénomène caractéristique d'une couche de mélange perturbée par un bruit tridimensionnel. On compte sur les visualisations quatre gros tourbillons transversaux. Les tourbillons longitudinaux créés entre ces grosses structures primaires apparaissent entre le deuxième et le troisième tourbillon de type Kelvin Helmholtz. Malheureusement, la limitation du domaine dans la direction de l'écoulement nous empêche d'observer correctement une turbulence développée. En effet, de manière à éviter tout décollement au niveau du bord de fuite, le biseau est faiblement incliné par rapport à celui de Perret [81].

a) Vue de profil



b) Vue dans le plan $(x - y)$



c) Vue dans le plan $(x - z)$

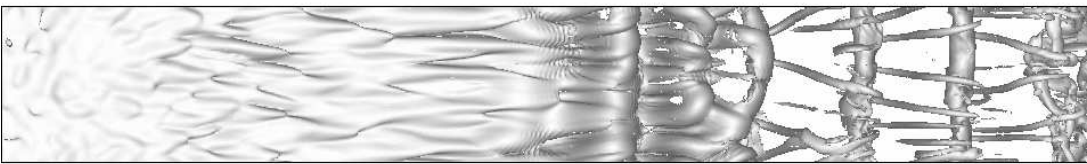


FIG. 7.6 – Iso-surface de la norme de vorticité $\omega_n = 0.75\Delta U/h$ pour la simulation de couche de mélange classique.

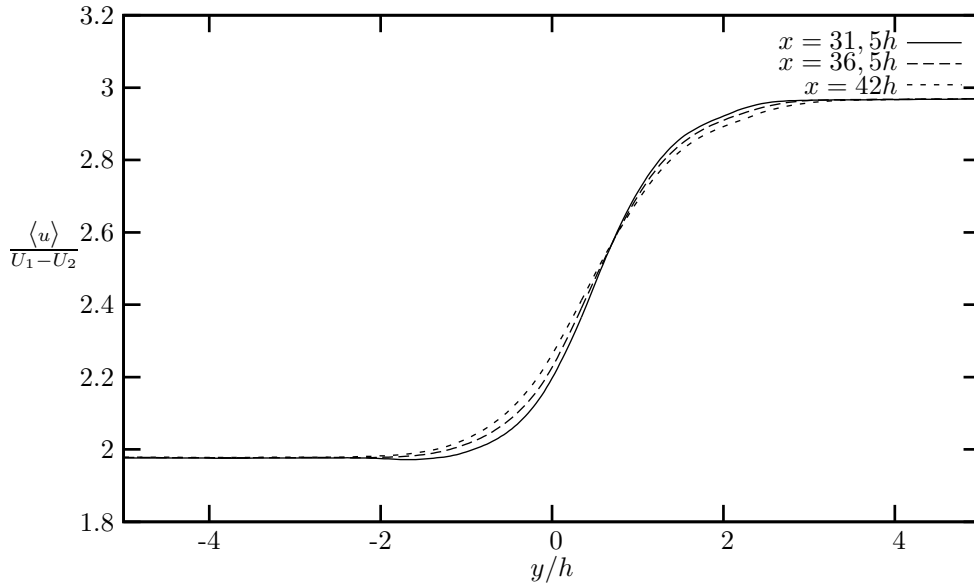


FIG. 7.7 – *Superposition de trois profils moyens de vitesse longitudinale pour $31,5h \leq x \leq 42h$.*

7.2.4 Etude statistique

Nous allons maintenant analyser les données statistiques de cette simulation afin de confirmer ces premières conclusions. Les données statistiques sont calculées sur une période de temps équivalent à environ 14 lâchers tourbillonnaires ce qui représente 16000 itérations avec un pas de temps de $\Delta t = 0,005h/\Delta U$.

Evolution des profils de vitesse moyenne

L'analyse de la figure (7.8) montre clairement la différence de la dynamique de l'écoulement entre la simulation et les résultats de Perret [81]. Dans notre simulation, l'apparition des tourbillons de Kelvin-Helmholtz est plus tardive que chez Perret [81]. C'est pourquoi les profils de vitesse proche du bord de fuite sont différents. En fin de domaine, on observe cependant un meilleur accord entre les profils. Chez Perret [81], l'effet de sillage du biseau disparaît à partir de $x \simeq 20h$. A partir de cette abscisse, son champ moyen de vitesse semble atteindre un régime de similitude. Dans notre simulation et pour le domaine de calcul considéré, le régime de similitude pour le champ moyen de vitesse n'est pas atteint comme le montre la figure (7.7).

La figure (7.9) nous montre l'évolution longitudinale du déficit de vitesse f pour la configuration CMC et pour la configuration CME. Ces courbes ont été obtenues sur la base des travaux de Wallace et Redekopp [100]. La méthode utilisée est décrite dans la partie (6.2.4). Contrairement à la configuration CME, la zone d'instabilité absolue est presque inexistante dans la configuration CMC, on peut donc dire que l'écoulement est convectivement instable. Ceci confirme bien les conclusions des simulations bidimensionnelles sur

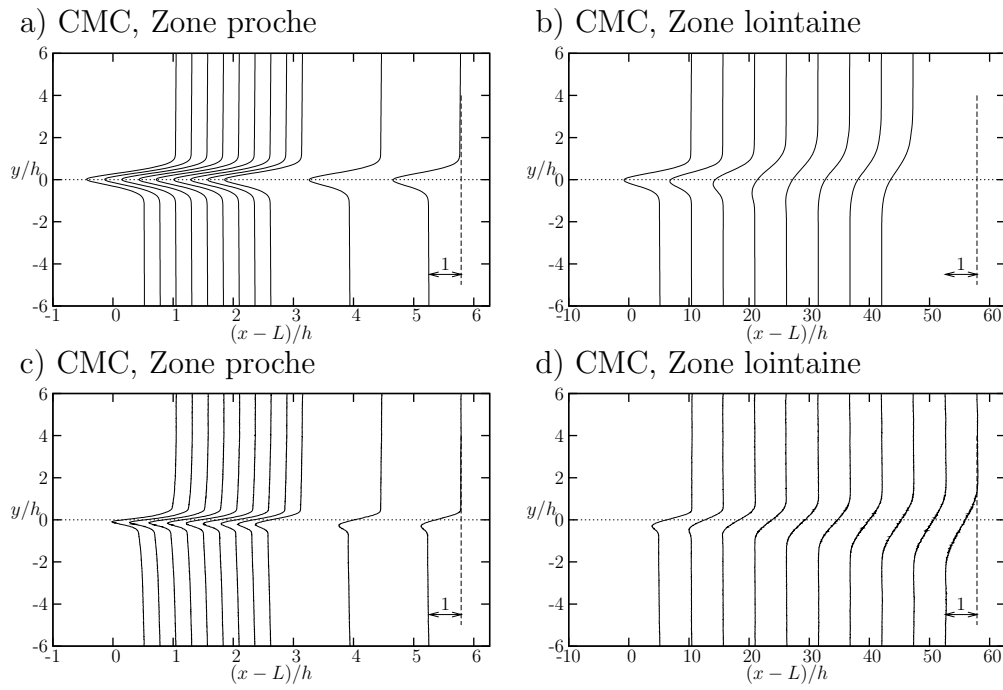


FIG. 7.8 – *Distribution de la vitesse moyenne adimensionnée : a) et b) résultats de notre simulation, c) et d) résultats de Perret [81].*

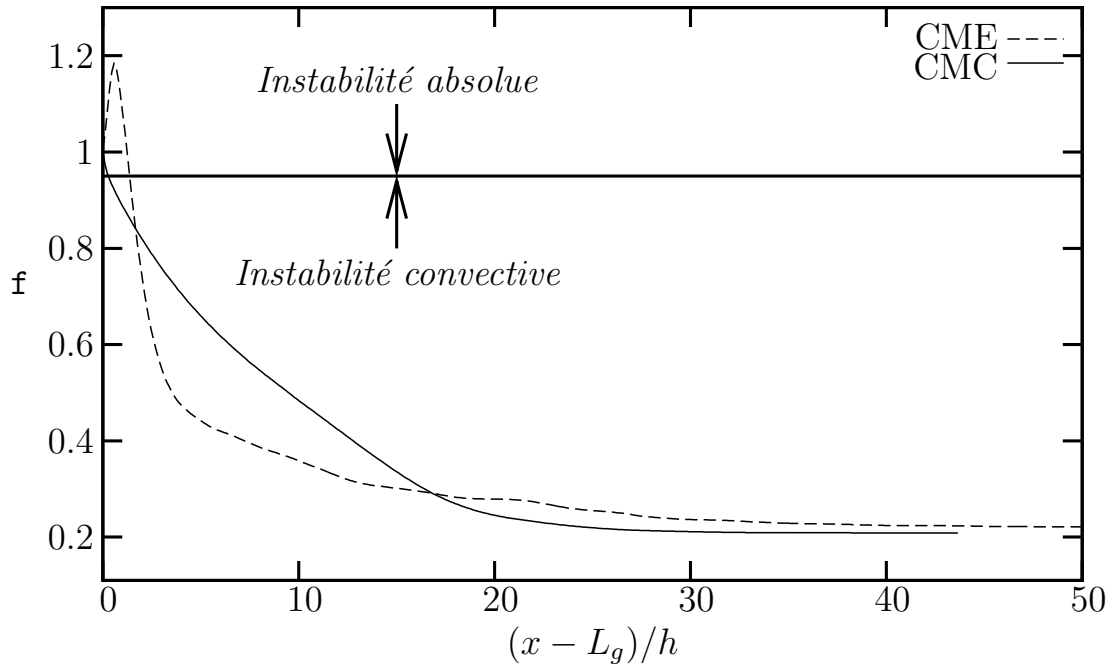


FIG. 7.9 – *Evolution longitudinale du déficit de vitesse $\mathbf{f} = (U_m - U_{min})/U_m$ (paramètre de vitesse $\lambda = 0, 20$) (L_g est égal à L pour la CMC et à l pour la CME).*

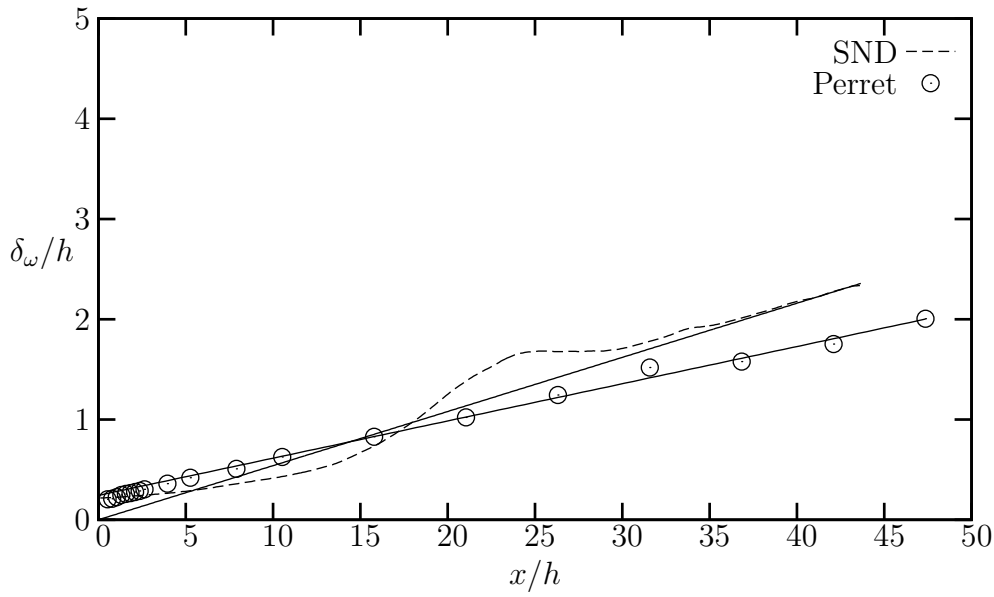


FIG. 7.10 – Evolution longitudinale de l'épaisseur de vorticité.

l'influence d'une perturbation dans la dynamique de l'écoulement.

Evolution de l'épaisseur de vorticité

Afin de caractériser l'évolution longitudinale de l'écoulement et son épaississement, nous avons tracé l'évolution longitudinale de l'épaisseur de vorticité définie par

$$\delta_\omega(x) = \frac{\Delta U}{|\partial \langle u_x(x) \rangle / \partial y|_{max}} \quad (7.1)$$

L'évolution de l'épaisseur de vorticité pour les deux écoulements est présentée sur la figure (7.10). La pente obtenue par Perret [81] est de $d\delta_\omega/dx = 0,037$, valeur en accord avec les résultats de Sabin [91] et Braud et al. [13] pour des rapports de vitesse similaires. Pour notre simulation, la pente est de $d\delta_\omega/dx = 0,054$, légèrement supérieure à celle de Perret [81]. Cette différence peut se justifier aisément par la différence importante de Reynolds entre les deux écoulements considérés puisqu'il y a un facteur 36 entre les deux nombres de Reynolds.

Moments d'ordre deux

Comme le montre la figure (7.11), l'influence du sillage de la plaque biseautée s'estompe rapidement. Les variations des grandeurs fluctuantes dans notre simulation sont beaucoup plus faibles que dans le cas de la couche de mélange épaisse. De plus, comme notre domaine de calcul est trop court dans la direction longitudinale, le régime de similitude n'est pas atteint pour les grandeurs fluctuantes sur ce domaine. Chez Perret [81], le régime de

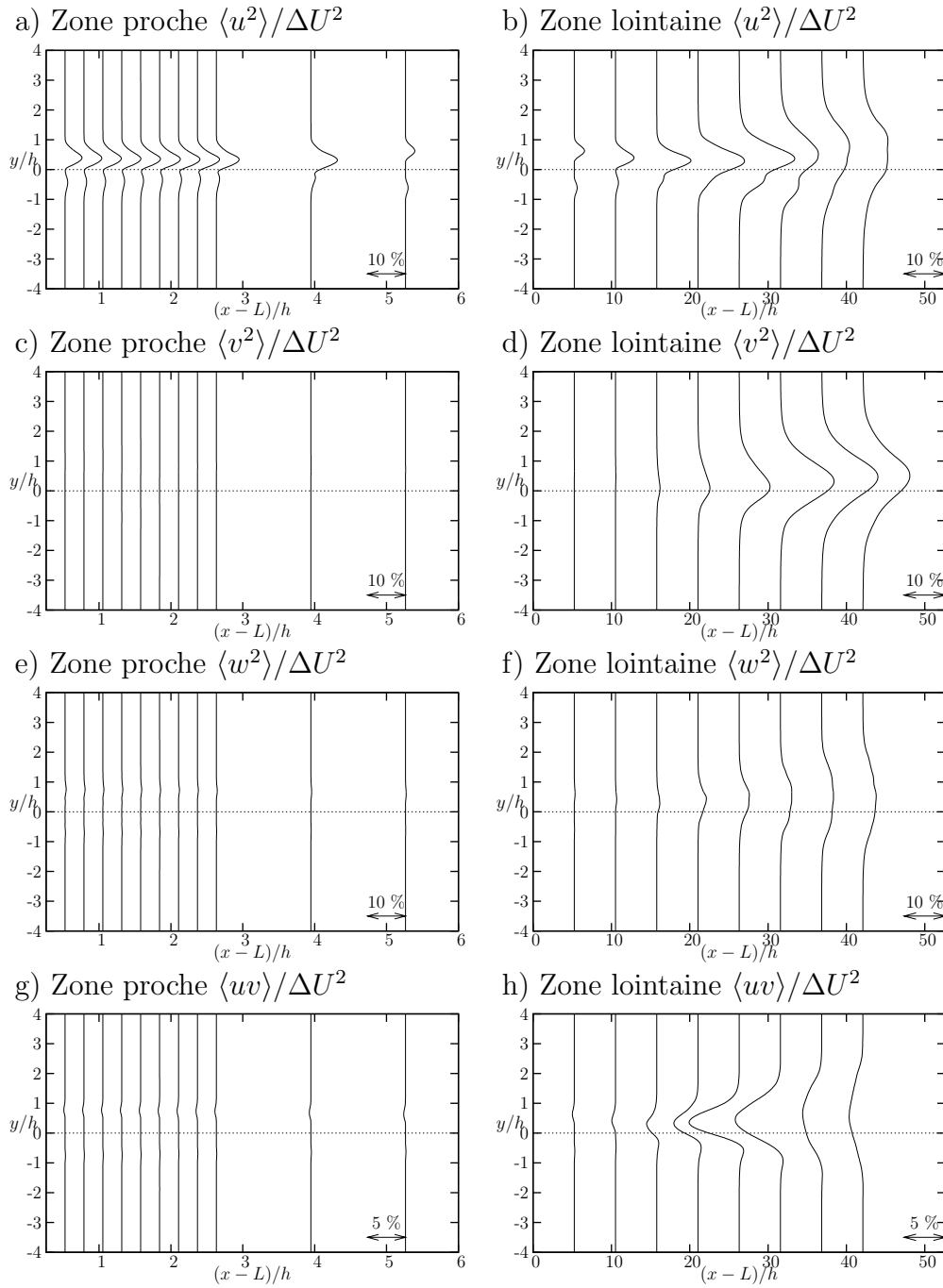


FIG. 7.11 – Evolution longitudinale des tensions de Reynolds.

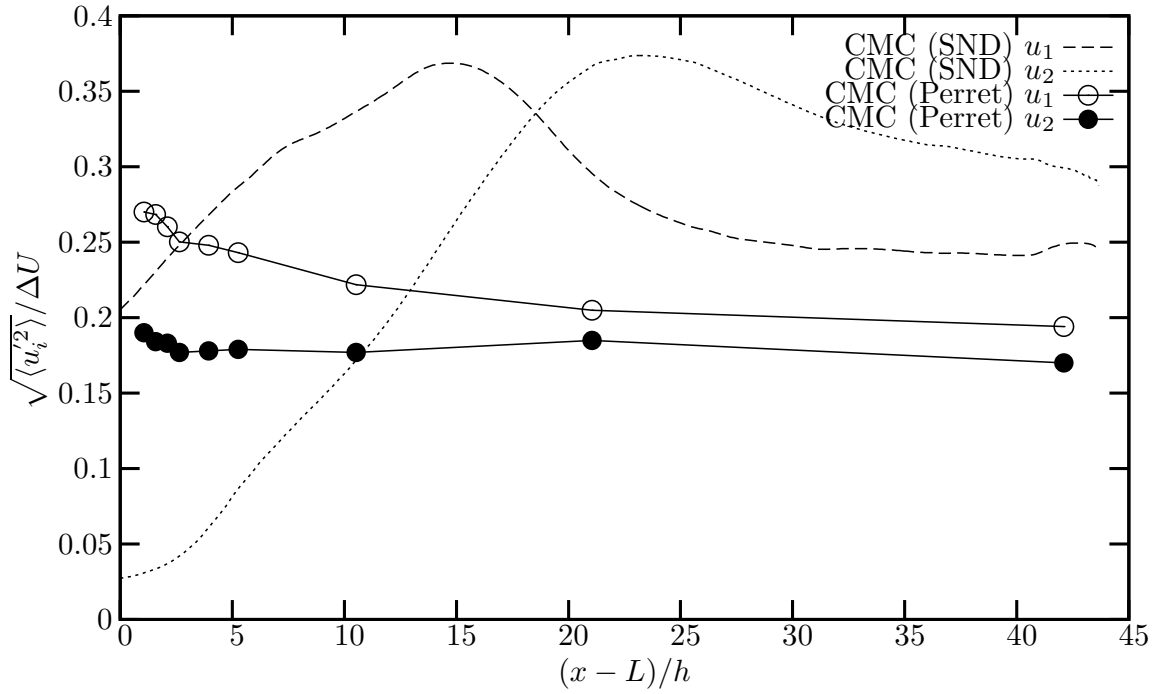


FIG. 7.12 – *Evolution longitudinale des maxima des tensions de Reynolds.*

similitude est atteint pour $x \simeq 21h$. On remarque aussi que le niveau de la tension $\langle v^2 \rangle / \Delta U^2$ est anormalement élevé dans notre simulation. De plus, on constate que les extrema se situent du côté haute vitesse comme dans le cas de la couche de mélange épaisse. Enfin, pour la tension croisée $\langle uv \rangle / \Delta U^2$, nous n'observons qu'un seul extremum négatif comme chez Perret [81] même si dans notre simulation, cet extremum est beaucoup plus élevé.

La figure (7.12) présente la comparaison entre l'évolution longitudinale des maxima des tensions de Reynolds pour les résultats de Perret [81] et pour notre simulation. Dans notre simulation, on observe une forte variation de ces extrema. Ils commencent à diminuer environ au niveau de l'abscisse qui correspond à la formation des tourbillons de Kelvin Helmholtz. Chez Perret [81], on observe aussi une décroissance de ces extrema mais avec des valeurs beaucoup plus faibles. Dans les deux cas, les variations des extrema sont beaucoup plus faibles que pour la couche de mélange épaisse. De plus, on constate que les maxima des fluctuations de la composante verticale v restent très importants pour la simulation et qu'ils restent plus importants que les maxima des fluctuations de la tension $\langle u^2 \rangle / \Delta U^2$.

7.2.5 Synthèse

Nous avons réalisé deux simulations d'un écoulement de couche de mélange avec deux géométries pour le bord de fuite différentes. Dans la configuration CME (bord de fuite épais), nous avons pu constater une forte influence de la composante sillage dans la dyna-

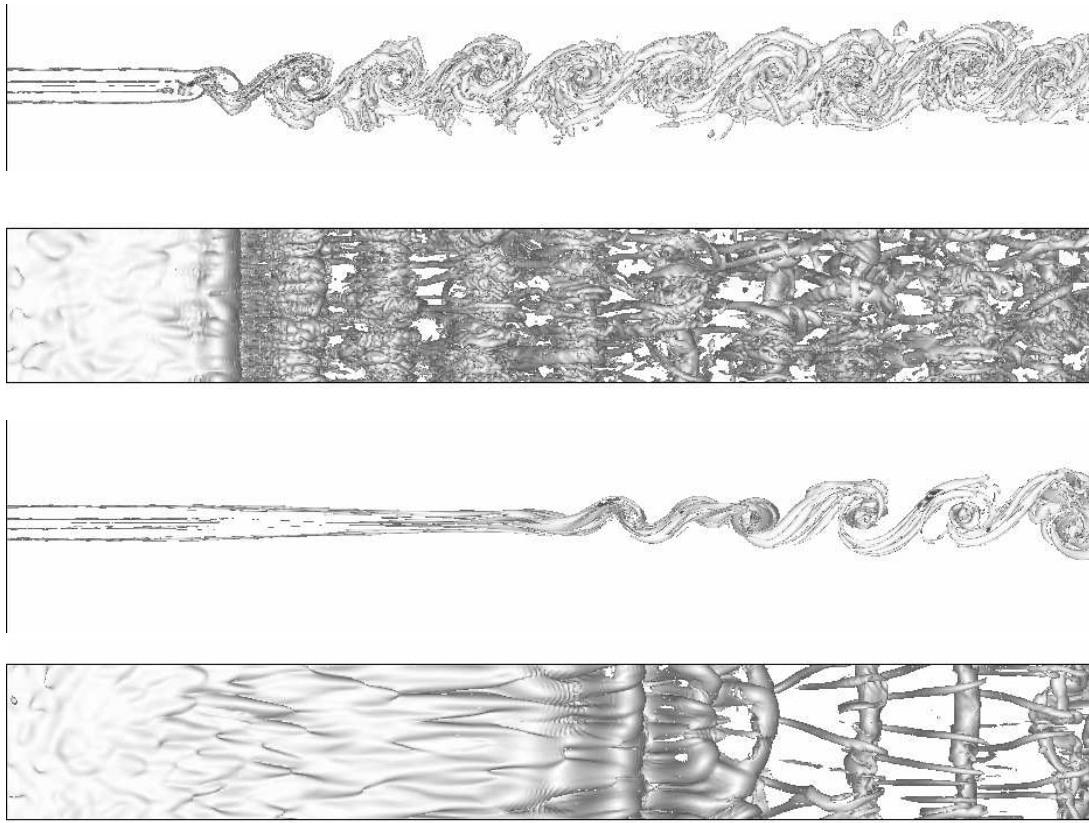


FIG. 7.13 – Iso-surface de la norme de vorticité $\omega_n = 0,75\Delta U/h$. Couche de mélange épaisse (haut) et couche de mélange classique (bas) .

mique de cet écoulement. De plus, nous avons pu mettre en évidence la présence d'une zone d'instabilité absolue dans la région proche du bord de fuite. Cette zone joue un rôle d'oscillateur pour le reste de l'écoulement expliquant le fait que cet écoulement n'a pas besoin d'une perturbation dans la condition d'entrée pour se déstabiliser et transitionner vers un état turbulent. Près du bord de fuite, l'écoulement est de type sillage, puis on observe que les tourbillons de vorticité positive disparaissent progressivement rendant l'écoulement asymétrique. En effet, on observe une déviation de l'allée de Karman du côté haute vitesse pour finalement donner loin du bord de fuite un écoulement de type couche de mélange spatiale.

Dans la configuration CMC (bord de fuite biseauté), nous avons vu que la composante sillage était très largement dominée par la composante couche de mélange. Nous avons observé que cet écoulement était sensible à une perturbation dans la condition d'entrée puisque sans perturbation initiale l'écoulement a tendance à se relaminariser alors qu'avec une perturbation initiale, on observe les phénomènes physiques typiques de la couche de mélange. Nous avons vu que la zone d'instabilité absolue était extrêmement petite. De ce

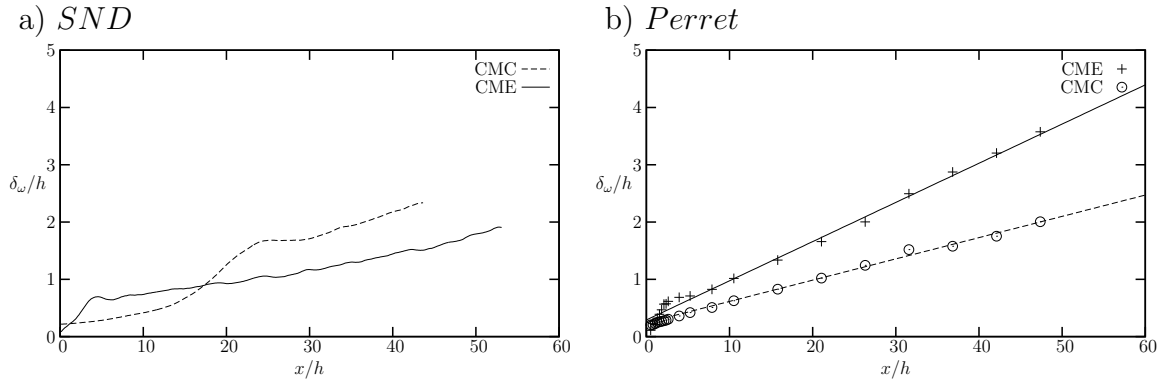


FIG. 7.14 – Evolution longitudinale de l'épaisseur de vorticité.

fait, cette dernière n'a qu'une influence réduite sur la dynamique de l'écoulement. C'est pourquoi, il est nécessaire d'injecter des perturbations dans les couches limites laminaires pour transitionner vers un état turbulent.

La figure (7.13) montre l'iso-surface de la norme de vorticité $\omega_n = 0,75\Delta U/h$ pour les deux types de configuration du bord de fuite. Comme on peut le voir, dans les deux simulations, on observe une dynamique tridimensionnelle en aval du bord de fuite. Cependant, il serait utile d'entreprendre pour la configuration CMC une simulation avec un domaine de calcul plus long dans la direction longitudinale, et afin d'éviter tout problème de confinement, plus large dans la direction transversale.

La figure (7.14) nous montre l'évolution de la vorticité pour les configurations CME et CMC et les expériences de Perret [81]. Les évolutions pour la couche de mélange classique sont à peu prêt en accord, la différence se justifiant par la différence importante du nombre de Reynolds. En revanche pour la couche de mélange épaisse, les deux évolutions sont très différentes. En effet, Perret [81] constate un épanouissement double de celui d'une couche de mélange classique. Il justifie cette croissance par le fait que la zone d'instabilité absolue dans la zone près du bord de fuite épais agit comme un résonateur excitant l'écoulement. Dans nos investigations, nous retrouvons bien aussi cette zone d'instabilité absolue mais nous ne retrouvons pas cette forte croissance de l'épaisseur de vorticité. Dans nos simulations, l'épaisseur de vorticité de la couche de mélange épaisse est inférieure à celle de la couche de mélange classique, contrairement aux conclusions de Perret [81]. Nous avons déjà émis des hypothèses sur ce désaccord (nombre de Reynolds, nature des couches limites et dimension réduite de la soufflerie avec effets de bord) et des simulations futures pourront bientôt apporter plus d'informations sur ce point.

Pour conclure, nous pouvons dire que

- La modification de la géométrie du bord de fuite entraîne une profonde modification de la dynamique de l'écoulement de couche de mélange.
- Pour la configuration CME, l'écoulement est fortement influencé par la composante sillage dans la zone proche du bord de fuite visible par un fort déficit de vitesse sur le champ moyen de vitesse et par une zone d'instabilité absolue juste en aval du

bord de fuite qui joue le rôle d'un oscillateur excitant l'écoulement.

- Pour la configuration CMC, nos simulations montre que cet écoulement est conforme à ceux rencontrés dans la littérature même si la taille de notre domaine dans la direction longitudinale pour la simulation tridimensionnelle nous empêche d'observer un état pleinement turbulent. Nous avons aussi pu observer la sensibilité de l'écoulement à une perturbation dans la condition d'entrée.

Chapitre 8

Conclusions et perspectives

La mise en œuvre de simulations des mouvements tourbillonnaires en aval d'un bord de fuite a constitué la principale motivation de ce travail. Pour satisfaire cet objectif, nous avons dû réaliser au préalable un certain nombre de développements numériques visant à élargir le champ d'application d'un code de calcul déjà existant et propre au laboratoire.

L'équation de Poisson dans ce code de calcul était partiellement résolue dans l'espace spectral alors que le reste des équations était traité par des opérateurs aux différences finies. Ce code combiné à une méthode de forçage direct, permettait déjà de simuler des écoulements avec des géométries complexes bien que le maillage utilisé soit un maillage cartésien.

Après avoir décrit les méthodes numériques utilisées, nous avons effectué un bilan pour ce code en identifiant ses points faibles et les nombreuses améliorations à lui apporter pour le rendre plus adapté aux objectifs de ce travail ainsi qu'aux besoins des différentes équipes de recherche du laboratoire.

Ensuite, nous avons présenté tous les développements numériques réalisés pendant cette thèse. Un effort préliminaire important a été fait pour convertir le code en Fortran 90 principalement dans le but de permettre l'intégration de nouvelles sous-routines de transformées de Fourier rapides dont la modularité a constitué un atout pour la suite de notre travail.

La première étape a été l'amélioration de la résolution de l'équation de Poisson avec comme objectif de résoudre cette équation entièrement dans l'espace spectral indépendamment des conditions aux limites de la simulation envisagée. Cette modification a conduit à l'accès pour nos simulations à une gamme de combinaisons de conditions aux limites nettement enrichie.

Ce solveur de Poisson entièrement spectral nous a ensuite permis d'envisager de traiter le champ de pression avec une grille décalée dans le but de supprimer les parasites contaminant la pression lorsque le code est combiné avec une méthode de forçage direct. A noter que l'utilisation d'une grille décalée ne concerne que le traitement de la pression, c'est pourquoi la mise en œuvre de cette méthode n'a nécessité qu'un développement réduit pour un coût de calcul identique à la version collocalisée.

Enfin, nous avons pu mettre au point une méthode permettant d'utiliser un maillage inhomogène dans une direction de l'espace. La fonction de raffinement que nous avons choisie permet de repousser jusqu'à l'infini les bornes du domaine de calcul dans une direction et de raffiner le maillage au centre du domaine.

Nous avons par la suite effectué un grand nombre de simulations dans le but de valider chaque développement. Pour se faire, nous avons utilisé principalement deux méthodes : re-simuler des écoulements déjà validés avec l'ancienne version du code et/ou simuler des écoulements dont la solution analytique est connue.

Les nouvelles transformées de Fourier ont principalement été testées avec l'écoulement de Taylor-Green en 2D. Le nouveau solveur spectral pour la résolution de l'équation de Poisson a lui été testé avec un écoulement de cavité dont la solution analytique est connue, l'écoulement de cavité stationnaire de Burggraf.

Ensuite, nous avons refait un grand nombre de simulations déjà validées au laboratoire comme l'écoulement de couche de mélange temporelle ou l'écoulement de sillage derrière un cylindre. Ces simulations nous ont aussi permis de mettre en lumière toutes les qualités des schémas Hermiteens de haute précision, en termes de coût de calcul et de précision. Nous avons aussi pu mettre en avant la robustesse des schémas décalés par rapport aux schémas collocalisés pour le traitement de la pression et le maintien de la divergence nulle.

La fin de cette étude a été consacrée à la simulation d'un écoulement de couche de mélange avec prise en compte de la géométrie du bord de fuite de la plaque séparatrice. Nous avons étudié deux configurations d'écoulement : une couche de mélange avec un bord de fuite épais ou biseauté. Les simulations réalisées dans cette thèse nous ont d'une part permis de valider le nouveau code mais aussi d'apporter un éclairage complémentaire pour la connaissance de cet écoulement déjà étudié expérimentalement au LEA.

Nous avons tout d'abord étudié la couche de mélange épaisse. Nous avons effectué un certain nombre de simulations dans le but de déterminer la configuration de la simulation tridimensionnelle mais aussi pour mesurer l'influence du rapport de vitesse r et d'une perturbation amont sur la dynamique de l'écoulement. Nous avons pu constater l'importance de la composante sillage créée par la géométrie droite du bord de fuite sur le développement des tourbillons.

Puis nous avons analysé les résultats de la simulation tridimensionnelle en effectuant un certain nombre de comparaisons avec les investigations expérimentales de Perret [81]. Bien que le nombre de Reynolds de notre simulation soit nettement inférieur à celui des expériences et que la nature de nos couches limites soient laminares, nous avons pu observé un bon accord entre nos données et les résultats expérimentaux dans la région proche du bord de fuite. Par exemple nous avons pu détecter la présence d'une zone d'instabilité absolue dans la région proche du bord de fuite créée par la composante sillage. Cependant, nous avons aussi un certain nombre de désaccords tels les niveaux de fluctuations des grandeurs turbulentes. Nous avons pu aussi observer une différence de comportement dans l'évolution longitudinale de la croissance de la couche de mélange. Perret [81] trouve

une croissante importante de sa couche de mélange épaisse qu'il justifie principalement par la présence d'une zone d'instabilité absolue juste en aval du bord de fuite. Nous aurions cependant tendance à penser que la composante sillage inhibe les appariements de tourbillons, cette inhibition suggérant à l'inverse un plus faible accroissement de la couche de mélange épaisse comparé à celui d'une couche de mélange classique.

Tant que d'autres simulations à plus haut Reynolds avec des couches limites turbulentes n'auront pas été menées, il sera difficile d'élucider dans cette configuration le rôle joué ou non par les appariements dans l'accroissement de la couche de mélange épaisse.

Nous avons ensuite étudié une couche de mélange classique en rajoutant au bord de fuite un profil biseauté. Nous avons cherché à déterminer l'angle du profil de manière à éviter tout décollement au niveau de la plaque séparatrice. Puis nous avons cherché à mesurer l'influence du rapport des vitesses r et d'une perturbation dans la condition d'entrée. Nous avons pu constater que cet écoulement était très sensible aux perturbations amont conformément à ce qui peut être attendu lorsqu'un écoulement est convectivement instable. Dans cet écoulement nous avons aussi remarqué que la composante sillage était beaucoup moins influente que pour la couche de mélange épaisse.

Puis nous avons analysé les résultats de la simulation 3D toujours en effectuant des comparaisons avec les investigations expérimentales de Perret [81]. Malheureusement, pour cet écoulement, nous n'avons pas pu trouver des résultats comparables avec ceux de Perret [81], en raison notamment de la longueur trop courte de notre domaine de calcul dans la direction longitudinale et du faible nombre de Reynolds.

Cependant, même si nous n'avons pas pu obtenir en fin de domaine un état pleinement turbulent, nous avons quand même pu observer certains phénomènes caractéristiques de la transition à la turbulence dans un écoulement de couche de mélange classique.

L'ensemble de ses travaux a fait l'objet d'une participation à une école d'été sur la transition et la turbulence à Porto Alegre au Brésil et d'une participation au congrès du sixième Workshop Direct and Large-Eddy Simulation à Poitiers. Les deux articles associés à ces deux manifestations internationales sont présentés dans l'annexe D.

Durant cette thèse, nous avons seulement effectué des *SND* en considérant des couches limites laminares en amont. C'est pourquoi il serait très intéressant d'envisager des *SGE* à plus haut nombre de Reynolds sur un domaine beaucoup plus étendu dans la direction longitudinale et dans la direction transversale. La reproduction plus fidèle des conditions amont générées par Perret [81] nécessitera le développement d'une méthode (Voir Lund *et al* [68]) permettant la génération de couches limites turbulentes.

Par ailleurs, pour rendre encore plus réalistes les *SGE* en considérant le nombre de Reynolds réel des investigations expérimentales, il serait aussi nécessaire d'avoir recours à un traitement de parois par conditions aux limites approchées [85].

Nous avons développé au cours de cette thèse un code de calcul qui a permis de simuler un écoulement de couche de mélange avec la prise en compte des parois. Le laboratoire dispose maintenant d'un code de calcul simple, polyvalent et rapide, dont les qualités sont susceptibles de bénéficier à un ensemble d'études menées au laboratoire en constituant

une alternative intéressante aux codes de calcul industriels. Plusieurs collaborations avec différentes équipes de recherche sont déjà mise en œuvre autour d' **Incompact3d** qui est maintenant opérationnel pour l'étude, l'analyse et la compréhension de la turbulence incompressible.

A titre d'exemple dans le cadre de ses travaux sur le rayonnement acoustique d'écoulements turbulents pariétaux, Margnat [72] a utilisé le code pour étudier le comportement du champ de pression pour un écoulement impactant sur un bord d'attaque rectangulaire. Il a pu noter l'efficacité de l'approche décalée pour résoudre les problèmes d'oscillations sur le champ de pression.

Adjovi [1] va être amené à réaliser des simulations avec la nouvelle version du code pour étudier la dynamique d'un jet tournant avec pour ambition de simuler l'écoulement complet en prenant en compte les éléments principaux du dispositif expérimental grâce à la méthode de forçage direct (modélisation de la buse en amont et de la veine tubulaire de section constante). De telles simulations pourraient apporter des informations précieuses pour mieux cerner les processus de déstabilisation du jet tournant.

Une étude numérique sur le contrôle des écoulements par activateur fluide (actionneur de type chevrons, modélisé grâce à la méthode de forçage direct) va être très prochainement entreprise avec le code de calcul afin de mieux cerner les processus physiques associés au contrôle et de comparer les résultats avec les investigations expérimentales de Laurendeau *et al.* [60]. L'originalité de la démarche tient ici dans la prise en compte des actionneurs par la méthode de forçage direct rendue possible grâce à l'utilisation d'un maillage inhomogène, le but étant d'obtenir une modélisation très précise de la région proche de la buse.

Toujours dans un objectif de contrôle des écoulements, des besoins nouveaux apparaissent dans la maîtrise de la modélisation numérique des parois mobiles (actionneurs mécaniques en mouvement). Des travaux préliminaires sur le sujet ont déjà été effectués au sein du LEA pour évaluer le potentiel de la technique de forçage direct dans le contexte des écoulements en présence de parois mobiles [86]. Les premiers résultats pour cette méthode sont convaincants et il serait intéressant de poursuivre cette thématique.

Bibliographie

- [1] J. Adjovi. *Stabilité des jets co- et contra-rotatifs (thèse en cours)*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2005.
- [2] R. J. Adrian and P. Moin. Stochastic estimation of organized turbulent structure. *J. Fluid Mech.*, **190** :531–559, 1988.
- [3] R. A. Antonia. Conditionnal sampling in turbulence measurement. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **13** :131–156, 1981.
- [4] E.J. Avital, N.D. Sandham, and K.H. Luo. Stretched cartesian grids for solution of the incompressible Navier-Stokes equations. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **33** :897–918, 2000.
- [5] J. Bell and R. Metha. Development of a two-stream mixing layer from tripped and untripped boundary layers. *AIAA Journal*, 28 :2034–2042, 1990.
- [6] L. P. Bernal and A. Roshko. Streamwise vortex structure in plane mixing layers. *J. Fluid Mech.*, **170** :499–525, 1986.
- [7] C. Bernardi and Y. Maday. A collocation method over staggered grids for the stokes problem. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **8** :537–557, 1988.
- [8] D. R. Boldman, P. F. Brinich, and M. E. Goldstein. Vortex shedding from a blunt trainling edge with equal and unequal external mean velocities. *J. Fluid Mech.*, **75** :721–735, 1976.
- [9] J. P. Bonnet, D. R. Cole, J. Delville, M. N. Glauser, and L.S. Ukeiley. Stochastic estimation and proper orthogonal decomposition : Complementary techniques for identifying strcuture. *Exp. Fluids*, **4** :189–196, 1994.
- [10] J. P. Bonnet, J. Delville, M. N. Glauser, R. A. Antonia, D. K. Bisset, D. R. Cole, H.E. Fielder, J.H. Garem, J.H. Hilberh, J. Jeong, N. K. R. Kevlahan, L.S. Ukeiley, and E. Vincendeau. Collaborative testing of eddy structure identification methods in free turbulent shear flows. *Exp. Fluids*, **25** :197–225, 1998.
- [11] C. Braud, D. Heitz, G. Arroyo, and J. Delville. Low-dimensional Galerkin model of a plane mixing layer-wake interaction. In *Proc. 3rd International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena*, Sendai, Japan, 2003.
- [12] C. Braud, D. Heitz, P. Braud, G. Arroyo, and J. Delville. Investigation of plane mixing layer - wake interaction by means of two 2D PIV planes and of POD. In *International Symposium on applications of laser techniques to fluid mechanics*, number session 32 in 11 th, 2002.

- [13] C. Braud, D. Heitz, P. Braud, G. Arroyo, and J. Delville. Analysis of the wake/mixing layer interaction using multiple plane piv and 3d classical pod. *EF*, **39** :95–104, 2004.
- [14] R. E. Breidenthal. Structure in turbulent mixing layers and wakes using a chemical reaction. *J. Fluid Mech.*, **109** :1–24, 1981.
- [15] G. Brown and A. Roshko. On density effects and large structures in turbulent mixing layers. *J. Fluid Mech.*, **64** :775–816, 1974.
- [16] O. R. Burggraf. Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flows. *J. Fluid Mech.*, **24** :113–151, 1966.
- [17] Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A., and Zang T.A. *Spectral methods in fluid dynamics*. Springer-Verlag, 1987.
- [18] A.B. Cain, J.H. Ferziger, and W.C. Reynolds. Discrete orthogonal function expansions for non-uniform grids using the fast fourier transform. *J. Comp. Phys.*, **56** :272–286, 1984.
- [19] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [20] M. H. Carpenter and C. A. Kennedy. A fourth-order 2n-storage runge-kutta scheme. Technical report, NASA TM 109112, 1994.
- [21] J. M. Chomaz, P. Huerre, and L. G. Redekopp. Bifurcations to local and global modes in spatially developing flows. *Phys. Rev. Letters*, **60(1)** :25–28, January 1988.
- [22] P. Comte. *Etude par simulation numérique de la transition à la turbulence en écoulement cisailé libre*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1989.
- [23] P. Comte, M. Lesieur, and E. Lamballais. Large- and small-scale stirring of vorticity and a passive scalar in a 3-D temporal mixing layer. *Phys. Fluids A*, **4(12)** :2761–2778, 1992.
- [24] P. Comte, J.H. Silvestrini, and P. Bégou. Streamwise vortices in large-eddy simulations of mixing layers. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, **17(4)** :615–637, 1998.
- [25] J. W. Cooley, P. A. W. Lewis, and P. D. Welch. The fast fourier transform algorithm : Programming considerations in the calculation of sine, cosine, and laplace transforms. *J. Sound Vib.*, **12** :315–337, 1970.
- [26] J. W. Cooley and J.W. Tukey. An algorithm for the machine calculations of complex fourier series. *Math. Comp.*, **19** :294–301, 1965.
- [27] J. Cousteix. *Turbulence et couche limite*. Cepadues-Editions, 1989.
- [28] P. E. Dimotakis. Two-dimensionnal shear layer entrainment. *AIAA Journal*, **24(11)** :1791–1796, 1986.
- [29] P. E. Dimotakis and G. L. Brown. The mixing layer at high reynolds number : large-structure dynamics and entrainment. *J. Fluid Mech.*, **78** :535–560, 1976.

- [30] P. Druault. *Développement d'interfaces expérience/simulation. Application à l'écoulement de couche de mélange plane turbulente*. PhD thesis, Université de Poitiers, 1999.
- [31] P. Druault, S. Lardeau, J.-P. Bonnet, F. Coiffet, J. Delville, E. Lamballais, J.F. Largeau, and L. Perret. The generation of realistic 3D unsteady inlet conditions for LES. *AIAA Journal*, in press, 2003.
- [32] P. Druault, J.-F. Largeau, E. Lamballais, and J.-P. Bonnet. Numerical validation of a new methodology for the generation of realistic turbulent inflow conditions for les computations. In *Proc. Symposium on Advancements and Applications of LES - ASME FED 2004 Summer Meeting*, Charlotte, North Carolina, USA, 2004.
- [33] B. Dzioma and H.E. Fielder. Effect of initial conditions on two-dimensional free shear layers. *J. Fluid Mech.*, **152** :419–442, 1985.
- [34] M. Farge. Wavelet transforms and their applications to turbulence. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **24** :395–457, 1992.
- [35] H. E. Fielder. *Flows control : Fundamentals and practices*. Springer-Verlag, 1998.
- [36] C. Flores. *Etude numérique de l'influence d'une rotation sur les écoulements cisailés libres*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1993.
- [37] K. Goda. A multistep technique with implicit difference schemes for calculating two or three dimensional cavity flows. *J. Comp. Phys.*, **30** :76–95, 1979.
- [38] D. A. Hammond and L. G. Redekopp. Global dynamics of symmetric and asymmetric wakes. *J. Fluid Mech.*, **331** :231–260, 1997.
- [39] K. Hannemann and H. Jr. Oertel. Numerical simulation of the absolutely and convectively unstable wake. *J. Fluid Mech.*, **199** :55–88, 1989.
- [40] C. M. Ho and P. Huerre. Perturbed free shear layers. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **16** :365–422, 1984.
- [41] P. Huerre and P. Monkewitz. Local and global instabilities in spatially developing flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **22** :473–537, 1990.
- [42] A. K. M. F. Hussain. Coherent structures and turbulence. *JFM*, **173** :303–356, 1986.
- [43] T. Ivanić. *Etude des instabilités générées par deux jets tournants coaxiaux*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2002.
- [44] J. Jimenez. A spanwise structure in the plane shear layer. *J. Fluid Mech.*, **132** :319–336, 1983.
- [45] J. Kim and P. Moin. Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations. *J. Comp. Phys.*, **59** :308–323, 1985.
- [46] W. Koch. Local instability characteristics and frequency determination of self-excited wake flows. *J. Sound Vib.*, **99** :53–83, 1985.
- [47] M. M. Koochesfahani and C. E. Frierler. Instability of nonuniform density free shear layers with a wake profile. *AIAA Journal*, **27(12)** :1735–1740, 1989.

- [48] A. Kravchenko and P. Moin. Aliasing errors in large-eddy simulations. *CTR Manuscript*, **156**, 1996.
- [49] A. G. Kravchenko and P. Moin. On the effect of numerical errors in large eddy simulation of turbulent flows. *J. Comp. Phys.*, **131** :310–322, 1997.
- [50] E. Lamballais. *Simulations numériques de la turbulence dans un canal plan tournant*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1996.
- [51] E. Lamballais. Simulation numérique des mouvements tourbillonnaires dans les fluides. Mémoire d’Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Poitiers, 2003.
- [52] E. Lamballais and J. Silvestrini. Direct numerical simulation of interactions between a mixing layer and a wake around a cylinder. In *Proc. 2nd International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena*, proceeding sélectionné pour une publication au *Journal of Turbulence*, Stockholm, 2001.
- [53] E. Lamballais and J. Silvestrini. Direct numerical simulation of interactions between a mixing layer and a wake around a cylinder. *J. Turbulence*, **3** :028, 2002.
- [54] S. Lardeau. *Simulation numérique directe du contrôle d’écoulements cisailés libres par injection de fluide*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2001.
- [55] S. Lardeau, E. Collin, J. Delville, E. Lamballais, S. Barre, and J.P. Bonnet. Analysis of a jet-mixing layer interaction. In *Proc. 5th International Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurements*, Mallorca, Spain, 2002.
- [56] S. Lardeau, E. Lamballais, and J.P. Bonnet. Direct numerical simulation of a jet controlled by fluid injection. *J. Turbulence*, **3** :002, 2002.
- [57] S. Lardeau, E. Lamballais, and J.P. Bonnet. Effect of velocity ratio on the spatial development of a mixing layer : a DNS study. *Phys. Fluids*, en préparation, 2004.
- [58] J. Lasheras, J. S. Cho, and T. Maxworthy. On the origin and evolution of streamwise vortical structures in a plane, free shear layer. *J. Fluid Mech.*, **172** :231–258, 1986.
- [59] J. Lasheras and H. Choi. Three-dimensional instability of a plane shear layer : an experimental study of the formation and evolution of streamwise vortices. *J. Fluid Mech.*, **189** :53–86, 1988.
- [60] E. Laurendeau, P. Jordan, J. Delville, and J.P. Bonnet. Turbulent jet noise control by fluid chevron. In *Proc. 4th Symp. on Turbulent Shear Flow Phenomena*, Williamsburg, Virginia, 2005.
- [61] H. Le and P. Moin. An improvement of fractional step methods for the incompressible Navier-Stokes equations. *J. Comp. Phys.*, **92** :369–379, 1991.
- [62] S. K. Lele. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *J. Comp. Phys.*, **103** :16–42, 1992.
- [63] M. Lesieur. *Turbulence in fluids*. Kluwer Academic Publishers, third edition, 1997.
- [64] M. Lesieur, C. Staquet, P. Le Roy, and P. Comte. The mixing layer and its coherence examined from the point of view of two-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.*, **192** :511, 1988.

- [65] J. T. C. Liu. Coherent structures in transitional and turbulent free shear flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **21** :285–315, 1989.
- [66] P. S. Lowery and W.C. Reynolds. Numerical simulation of a spatially-developping forced, mixing layer. Tf 26, Stanford University, 1986.
- [67] J. L. Lumley. The structure of inhomogeneous turbulent flows. *Atm. Turb. And Radio Wave Prop.*, Nauka, Moscou, edt Yaglom and Tatarsky :166–178, 1967.
- [68] T. S. Lund, X. Wu, and K. D. Squires. Generation of inflow data for spatially-developing boundary layer simulations. *J. Comp. Phys.*, **140** :233, 1998.
- [69] Y. Maday, D. Meiron, A. T. Patera, and E. M. Ronquist. Analysis of iterative methods for the steady and unsteady stokes problem : Application to spectral element discretizations. *SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing*, **14(2)** :310–337, 1993.
- [70] Y. Maday, A. T. Patera, and E. M. Ronquist. A well-posed optimal spectral element approximation for the stokes problem. Technical report, ICASE Report 87-48, NASA Langley Research Center, Virginia USA.
- [71] P. Manneville. *Instabilités, Chaos et Turbulence*. Les éditions de l'école Polytechnique, 2004.
- [72] F. Margnat. *Méthode numérique hybride pour l'étude du rayonnement acoustique d'écoulements turbulents pariétaux*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2005.
- [73] R. Mittal and S. Balachandar. Effect of three-dimensionality on the lift and drag of nomally two-dimensional cylinders. *Phys. Fluids*, **7** :1841–1865, 1995.
- [74] R. Mittal and S. Balachandar. On the inclusion of three-dimensional effects in simulations of two-dimensional bluff-body wake flows. In *Proc. of ASME Fluids engineering division summer meeting*, Vancouver, British Columbia, Canada, 1997.
- [75] P. Monkewitz and P. Huerre. Absolute and convective instabilities in free shear layers. *J. Fluid Mech.*, **159** :151–168, 1985.
- [76] F. Montigny-Rannou and Y. Morchoisne. A spectral method with staggered grid for incompressible navier-stokes equations. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **7** :175–189, 1987.
- [77] D. W. Moore and P. G. Saffman. The density of organized vortices in a turbulent mixing layer. *J. Fluid Mech.*, **64** :465–473, 1975.
- [78] Y. Morchoisne. Résolution des équations de navier-stokes par une méthode spectrale de sous-domaines. In *3^{me} Cong. Int. Meth. Ing.*, Ed P. Lascaux, p. 275–281, Paris, 1983.
- [79] P. Parnaudeau. *Etude numérique d'un écoulement cisailé turbulent complexe à basse vitesse : Application à la protection rapprochée*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2004.
- [80] P. Parnaudeau, E. Lamballais, D. Heitz, and J. H. Silvestrini. Combination of the immersed boundary method with compact schemes for DNS of flows in complex geometry. In *Proc. DLES-5*, Munich, 2003.

- [81] L. Perret. *Etude du couplage instationnaire calculs-expériences en écoulements turbulents*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2004.
- [82] C. S. Peskin. Flow patterns around heart valves : a numerical method. *J. Comp. Phys.*, **10** :252–271, 1972.
- [83] C. S. Peskin. Numerical analysis of blood flow in the heart. *J. Comp. Phys.*, **25** :220–252, 1977.
- [84] R. Peyret and T. D. Taylor. *Computational methods for fluid flow*. Springer-Verlag, 1983.
- [85] U. Piomelli and E. Balaras. Wall-layer models for large-eddy simulations. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **34** :349–374, 2002.
- [86] H. Rafelanaharifera. Simulation numérique en présence de parois mobiles. Mémoire de DEA, Université de Poitiers, 2004.
- [87] I. Raspo, S. Hugues, E. Serre ans A. Randriamampianina, and P. Bontoux. A spectral projection method for the simulation of complex three-dimensional rotating flows. *Computers and Fluids*, **31** :745–767, 2002.
- [88] J. W.L S. Rayleigh. On the stability, or instability, of certain fluid motions. *Lond. Math. Soc.*, **9** :57–70, 1880.
- [89] M. Rogers and R. Moser. Direct simulation of a self-similar turbulent mixing layer. *Phys. Fluids*, **6**(2) :903–923, 1994.
- [90] A. Roshko. Structure of turbulent shear flows : a new look. *AIAA Journal*, **14** :1349–1357, 1976.
- [91] C. M. Sabin. An analytical and experimental study of the plane incompressiblille, turbulent free shear layer with arbitrary velocity ratio and pressure gradient. Technical report, Stanford University, 1963.
- [92] T. M. Shih. A procedure to debug computer programs. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **21** :1027–1037, 1989.
- [93] T. M. Shih, C. H. Tan, and B. C. Hwang. Effects of grid staggering on numerical schemes. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **9** :193–212, 1989.
- [94] J. Silvestrini. *Simulation des grandes échelles des zones de mélanges ; application à la propulsion solide des lanceurs spatiaux*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1996.
- [95] J. Silvestrini and E. Lamballais. Direct numerical simulation of oblique vortex shedding from a cylinder in shear flow. In *Proc. 3rd International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena*, Sendai, Japan, 2003.
- [96] J.H. Silvestrini and E. Lamballais. Direct numerical simulation of wakes with virtual cylinders. *Int. J. Comp. Fluid Dynamics*, **16**(4) :305–314, 2002.
- [97] P. N. Swarztrauber. The methods of cyclic reduction, fourier analysis and the facr algorithm for the discrete solution of poisson’s equation on a rectangle. *SIAM Review*, **19** :490–501, 1977.

- [98] G. I. Taylor and G. K. Batchelor. *The Scientific Papers of G. I. Taylor, Vol II, Article 16*. Cambridge University Press, Cambridge, 1960.
- [99] A. A. Townsend. *The structure of turbulent shear flow*. Cambridge University Press, Cambridge, 1956.
- [100] D. Wallace and L. G. Redekopp. Linear instability characteristics of wake-shear layers. *Phys. Fluids*, **4**(1) :189–191, 1992.
- [101] R. B. Wilhelmson and J. H. Ericksen. Direct solutions for poisson’s equation in three dimensions. *J. Comp. Phys.*, **25** :319–331, 1977.
- [102] C.H.K. Williamson. Three-dimensional wake transition. *J. Fluid Mech.*, **328** :345–407, 1996.
- [103] J. H. Williamson. Low-storage Runge-Kutta schemes. *J. Comp. Phys.*, **35** :48, 1980.
- [104] C. D. Winant and F. K. Browand. Vortex pairing : the mechanism of turbulent mixing layer growth at moderate reynolds number. *J. Fluid Mech.*, **63** :237–255, 1974.
- [105] S. Yanase, R. N. Mondal, and Y. Kaga. Numerical study of non-isothermal flow with convective heat transfer in a curved rectangular duct. *Int. J. Thermal Sciences*, **44** :1047–1060, 2005.
- [106] M. M. Zdravkovich. *Flow around circular cylinders*. Oxford University Press, volume 1 edition, 1997.

Annexe A

Opérateurs aux différences finies

A.1 Formulation matricielle sur un maillage décalé

Il est possible d'écrire les équations (3.32) et (3.33) sous forme matricielle

$$\mathbf{C}_x \mathbf{f}' = \frac{1}{\Delta x} \mathbf{D}_x \mathbf{f}$$

$$\mathbf{C}_x^I \mathbf{f}^I = \mathbf{D}_x^I \mathbf{f}$$

1. *Condition périodique* : $\mathbf{C}_x$, $\mathbf{D}_x$, $\mathbf{C}_x^I$ et $\mathbf{D}_x^I$ sont respectivement des matrices tridiagonales et pentadiagonales cycliques, et pour la dérivée première, elles s'écrivent

$$\mathbf{C}_x = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & & & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & & & & \alpha & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{D}_x = \begin{pmatrix} -a & a & b & & & & -b \\ -b & -a & a & b & & & \\ & -b & -a & a & b & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & -b & -a & a & b \\ b & & & -b & -a & a \\ a & b & & & -b & -a \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}_x^I = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & & & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & & & & \alpha & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{D}_x^I = \begin{pmatrix} a & a & b & & & & b \\ b & a & a & b & & & \\ & b & a & a & b & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & b & a & a & b \\ b & & & b & a & a \\ a & b & & & b & a \end{pmatrix}$$

2. *Condition de type glissement libre* : On distingue deux cas de figures : soit la fonction f est paire, soit f est impaire.

Dans ces deux cas les matrices $\mathbf{C}_x$ et $\mathbf{C}_x^I$ sont des matrices tridiagonales et les matrices $\mathbf{D}_x$ et $\mathbf{D}_x^I$ sont des matrices pentadiagonales.

Quand f est paire, les matrices $\mathbf{C}_x$ et $\mathbf{D}_x$ s'écrivent

$$\mathbf{D}_x = \begin{pmatrix} -a & a+b & b & & & & & & \\ -b & -a & a & b & & & & & \\ & -b & -a & a & b & & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & -b & -a & a & b & \\ & & & & -b & -a & a & b & \\ & & & & & -b & -a-b & -a & \end{pmatrix}$$

Les matrices $\mathbf{C}_x^I$ et $\mathbf{D}_x^I$ s'écrivent

$$\mathbf{C}_x^I = \begin{pmatrix} 1+\alpha & \alpha & & & & & & & \\ \alpha & 1 & \alpha & & & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & & \alpha & 1 & \alpha \\ & & & & & & & \alpha & 1+\alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_x^I = \begin{pmatrix} a & a-b & b & & & & & & \\ b & a & a & b & & & & & \\ & b & a & a & b & & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & b & a & a & b & \\ & & & & b & a & a & b & \\ & & & & & b & b-a & a & \end{pmatrix}$$

3. *Condition de type Dirichlet* : dans ce cas, on utilise la technique mise au point pour le solveur totalement spectral. Quand f est paire, les matrices $\mathbf{C}_x$ et $\mathbf{D}_x$ s'écrivent

$$\mathbf{C}_x = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha & & & & & & & \\ \alpha & 1 & \alpha & & & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & & \alpha & 1 & \alpha \\ & & & & & & & \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_x = \begin{pmatrix} -a & a-b & b & & & & & & \\ -b & -a & a & b & & & & & \\ & -b & -a & a & b & & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & -b & -a & a & b & \\ & & & & -b & -a & a & b & \\ & & & & & b-a & -a & & \end{pmatrix}$$

Les matrices $\mathbf{C}_x^I$ et $\mathbf{D}_x^I$ s'écrivent

$$\mathbf{C}_x^I = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha & & & & & & \\ \alpha & 1 & \alpha & & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & \alpha & 1 & \alpha \\ & & & & & & \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_x^I = \begin{pmatrix} a & a-b & b & & & & & \\ b & a & a & b & & & & \\ & b & a & a & b & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & b & a & a & b \\ & & & & b & a & a & b \\ & & & & & & a+b & a \end{pmatrix}$$

On retrouve les mêmes matrices que pour le cas d'une condition aux limites semi-périodique. Quand f est impaire, les matrices $\mathbf{C}_x$ et $\mathbf{D}_x$ s'écrivent

$$\mathbf{C}_x = \begin{pmatrix} 1+\alpha & \alpha & & & & & & \\ \alpha & 1 & \alpha & & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & & \alpha & 1 \\ & & & & & & & \alpha & 1+\alpha \end{pmatrix}$$

Les matrices $\mathbf{C}_x^I$ et $\mathbf{D}_x^I$ s'écrivent

$$\mathbf{C}_x^I = \begin{pmatrix} 1+\alpha & \alpha & & & & & & \\ \alpha & 1 & \alpha & & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & & \alpha & 1 \\ & & & & & & & \alpha & 1+\alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_x^I = \begin{pmatrix} a-2b & a+b & b & & & & & \\ b & a & a & b & & & & \\ & b & a & a & b & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & b & a & a & b \\ & & & & b & a & a & b \\ & & & & & b & a-b & a+2b \end{pmatrix}$$

On remarque qu'on a seulement modifié la première ligne et la dernière ligne de la matrice $\mathbf{C}_x$

Les coefficients des matrices sont fournis par Lele [62] :

$$\alpha = \frac{9}{62}, \quad a = \frac{63}{62}, \quad b = \frac{17}{62}, \quad \alpha_I = \frac{3}{10}, \quad a_I = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad b_I = \frac{1}{20}$$

Annexe B

La Transformée de Fourier Rapide Décalée (*TFRD*)

La *TFRD* directe d'une fonction $f_{i+1/2}$ définie sur $[0, L_x]$ revient au calcul des coefficients $\hat{f}_l$ donnés par l'expression 3.37. La *TFRD* inverse permet d'obtenir les valeurs $f_{i+1/2}$ grâce à l'expression 3.38. En écrivant

$$e^{-\iota k_x x_{i+1/2}} = \cos(k_x x_{i+1/2}) - \iota \sin(k_x x_{i+1/2})$$

et en utilisant les relations suivantes, déduites de 3.39

$$\hat{a}_l = \frac{1}{n_x} \sum_{i=1}^{n_x} f_{i+1/2} \cos(k_x x_{i+1/2}), \quad -n_x/2 \leq l \leq n_x/2 - 1 \quad (\text{B.1})$$

$$\hat{b}_l = \frac{1}{n_x} \sum_{i=1}^{n_x} f_{i+1/2} \sin(k_x x_{i+1/2}), \quad -n_x/2 \leq l \leq n_x/2 - 1 \quad (\text{B.2})$$

on en déduit immédiatement la relation

$$\hat{f}_l = \hat{a}_l - \iota \hat{b}_l$$

Si on fait l'hypothèse que les $f_{i+1/2}$ sont réels, cela implique que les $\hat{a}_l$ et les $\hat{b}_l$ sont également réels. Afin de préserver la conservation de l'information entre l'espace physique et l'espace spectral, on va utiliser la condition d'hermité

$$\hat{f}_{-l} = \hat{f}_l^*$$

avec $\hat{f}^*$ qui correspond au complexe conjugué. Grâce à cette relation, on peut simplifier le calcul des *TFRD* en se limitant au calcul des $\hat{f}_l$ pour $l = 0, \dots, n_x/2$, soit

$$\hat{f}_l = \frac{1}{n_x} \sum_{i=1}^{n_x} f_{i+1/2} e^{-\iota k_x x_{i+1/2}}, \quad l = 0, \dots, n_x/2 \quad (\text{B.3})$$

et en estimant les $f_{i+1/2}$ par

$$f_{i+1/2} = \hat{a}_0 + \hat{a}_{n_x/2} \cos\left(\frac{n_x 2\pi}{2L_x} x_{i+1/2}\right) + 2 \sum_{l=1}^{n_x/2-1} \left(\hat{a}_l \cos(k_x x_{i+1/2}) + \hat{b}_l \sin(k_x x_{i+1/2}) \right) \quad (\text{B.4})$$

En utilisant les relations de trigonométrie suivantes

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad (\text{B.5})$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \quad (\text{B.6})$$

et

$$\cos\left(\frac{2\pi l(i+1/2)}{n_x}\right) = \cos\left[\frac{2\pi l(i-1)}{n_x} + \frac{\pi l}{n_x}\right] \quad (\text{B.7})$$

$$\sin\left(\frac{2\pi l(i+1/2)}{n_x}\right) = \sin\left[\frac{2\pi l(i-1)}{n_x} + \frac{\pi l}{n_x}\right] \quad (\text{B.8})$$

on obtient

$$\cos\left(\frac{2\pi l(i+1/2)}{n_x}\right) = \cos\left(\frac{2\pi l(i-1)}{n_x}\right) \cos\left(\frac{\pi l}{n_x}\right) - \sin\left(\frac{2\pi l(i-1)}{n_x}\right) \sin\left(\frac{\pi l}{n_x}\right) \quad (\text{B.9})$$

$$\sin\left(\frac{2\pi l(i+1/2)}{n_x}\right) = \sin\left(\frac{2\pi l(i-1)}{n_x}\right) \cos\left(\frac{\pi l}{n_x}\right) + \cos\left(\frac{2\pi l(i-1)}{n_x}\right) \sin\left(\frac{\pi l}{n_x}\right) \quad (\text{B.10})$$

On en deduit donc la relation suivante pour le calcul des $\hat{f}_l$

$$\begin{aligned} \hat{f}_l &= \frac{1}{n_x} \cos\left(\frac{\pi l}{n_x}\right) \sum_{i=1}^{n_x} f_{i+1/2} \left[\cos\left(\frac{2\pi l(i-1)}{n_x}\right) - \iota \sin\left(\frac{2\pi l(i-1)}{n_x}\right) \right] \\ &\quad - \frac{1}{n_x} \sin\left(\frac{\pi l}{n_x}\right) \sum_{i=1}^{n_x} f_{i+1/2} \left[\sin\left(\frac{2\pi l(i-1)}{n_x}\right) - \iota \cos\left(\frac{2\pi l(i-1)}{n_x}\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Si on utilise la relation $\hat{f}_l = \hat{a}_l - \iota \hat{b}_l$ on va avoir

$$\begin{aligned} \hat{a}_l &= \frac{1}{n_x} \cos\left(\frac{\pi l}{n_x}\right) \sum_{i=1}^{n_x} f_{i+1/2} \cos\left(\frac{2\pi l(i-1)}{n_x}\right) \\ &\quad - \frac{1}{n_x} \sin\left(\frac{\pi l}{n_x}\right) \sum_{i=1}^{n_x} f_{i+1/2} \sin\left(\frac{2\pi l(i-1)}{n_x}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned} \hat{b}_l &= \frac{1}{n_x} \cos\left(\frac{\pi l}{n_x}\right) \sum_{i=1}^{n_x} f_{i+1/2} \sin\left(\frac{2\pi l(i-1)}{n_x}\right) \\ &\quad - \frac{1}{n_x} \sin\left(\frac{\pi l}{n_x}\right) \sum_{i=1}^{n_x} f_{i+1/2} \cos\left(\frac{2\pi l(i-1)}{n_x}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Pour la suite, on va définir

$$\hat{a}_l = \cos\left(\frac{\pi l}{n_x}\right)\hat{a}_{1l} - \sin\left(\frac{\pi l}{n_x}\right)\hat{a}_{2l} \quad (\text{B.14})$$

$$\hat{b}_l = \cos\left(\frac{\pi l}{n_x}\right)\hat{b}_{2l} - \sin\left(\frac{\pi l}{n_x}\right)\hat{b}_{1l} \quad (\text{B.15})$$

Les coefficients $\hat{a}_{1l}$, $\hat{a}_{2l}$, $\hat{b}_{1l}$ et $\hat{b}_{2l}$ sont obtenus à l'aide des *TFR*, définies par Colley et Tukey [26]. Pour trouver les coefficients $\hat{f}_l$, il suffit d'utiliser la relation

$$\hat{f}_l = \hat{a}_l - \iota \hat{b}_l$$

Nous avons donc maintenant à disposition un opérateur nous permettant de passer de l'espace physique à l'espace spectral pour une grille décalée. Un raisonnement analogue conduit à la mise en œuvre d'une Transformée de Fourier Rapide Décalée inverse.

Annexe C

La couche de mélange temporelle

C.1 Visualisation de la vorticité sur un maillage inhomogène

Globalement, nous pouvons dire qu'il n'y a pas de différences majeures entre la simulation à $n_y = 501$ points et la simulation à 129 points mis à part sur la visualisation (C.2.e). Le calcul sur un maillage inhomogène n'a pas perturbé le processus d'appariements de tourbillons.

En revanche, pour la simulation à 65 points, on commence à voir apparaître des petites oscillations dès la visualisation (C.3.e) et aussi au centre de la structure finale (C.3.h) en raison du maillage inadapté à la géométrie de l'écoulement.

De plus, on observe fort logiquement une dégradation du résultat pour 65 points et pour 33 points, les mailles aux niveaux des bords devenant de plus en plus grossières (4.6) et de ce fait l'écoulement ne peut être représenté correctement. En revanche dans les premiers temps de l'écoulement, les quatre simulations donnent un résultat quasi identique pour les deux premières visualisations.

Les trois simulations effectuées sur un maillage inhomogène montre les limites de la fonction de raffinement. En effet, nous imposons les bornes du domaine et nous imposons la maille au centre du domaine. A cause de ces restrictions, nous ne pouvons pas maîtriser la taille des mailles. De plus, comme cette fonction est portée dans l'espace spectral par le plus petit nombre de modes de Fourier possible (voir le Chapitre 3), nous ne pouvons pas contrôler de manière optimale la répartition des points avec les contraintes que l'on s'est imposé au départ.

Les figures suivantes présentent l'évolution temporelle du champ de vorticité ($\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$) observée lors des simulations bidimensionnelles pour différents maillages réalisées dans la partie (4.3).

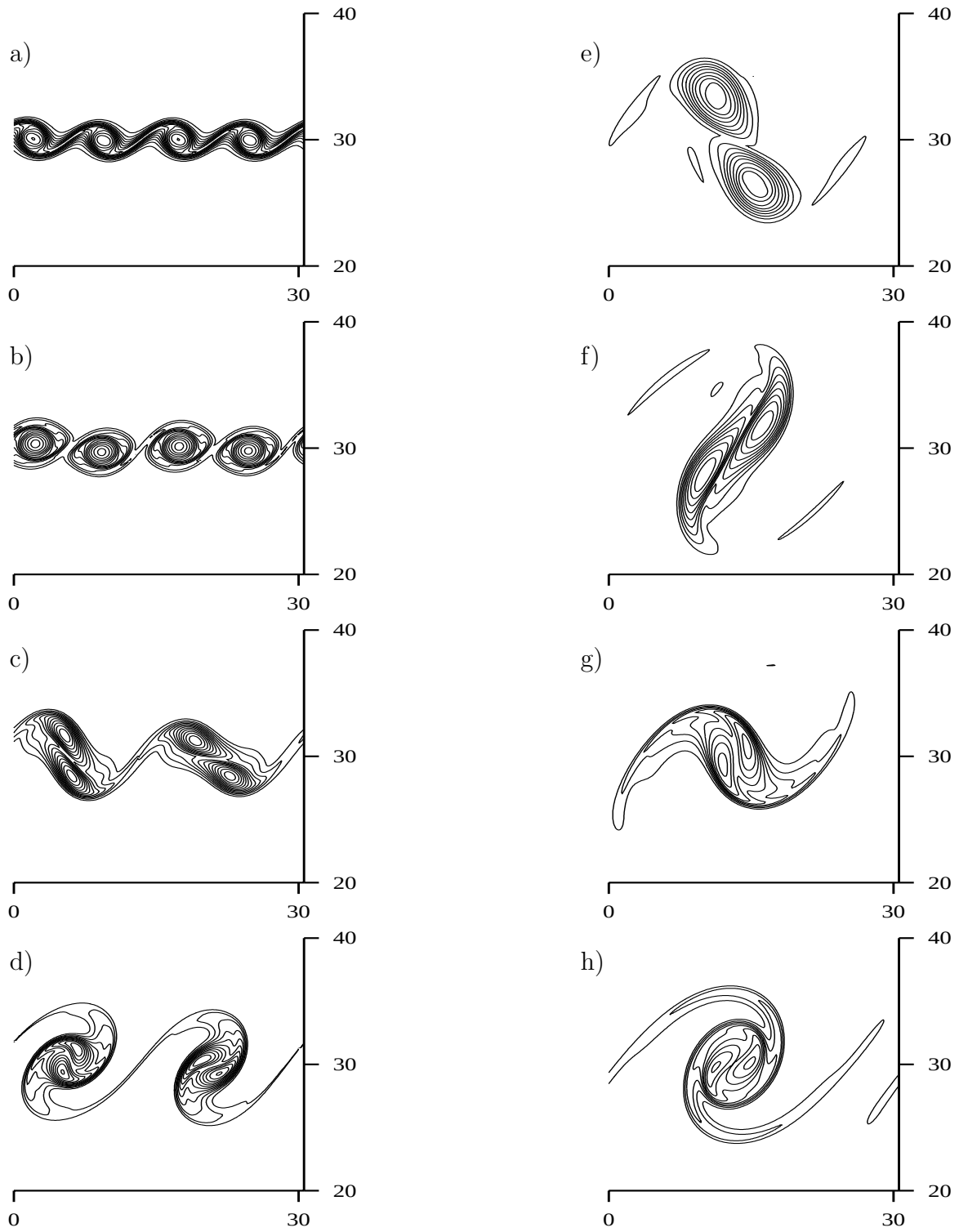


FIG. C.1 – Champ de vorticité d'une couche de mélange sur un maillage homogène pour $n_y = 501$ à différents instants : a) $\bar{t} = 10$, b) $\bar{t} = 17$, c) $\bar{t} = 26$, d) $\bar{t} = 33$, e) $\bar{t} = 62$, f) $\bar{t} = 70$, g) $\bar{t} = 80$ et h) $\bar{t} = 88$ avec $\bar{t} = 2t \frac{U_1 - U_2}{\delta_w}$.

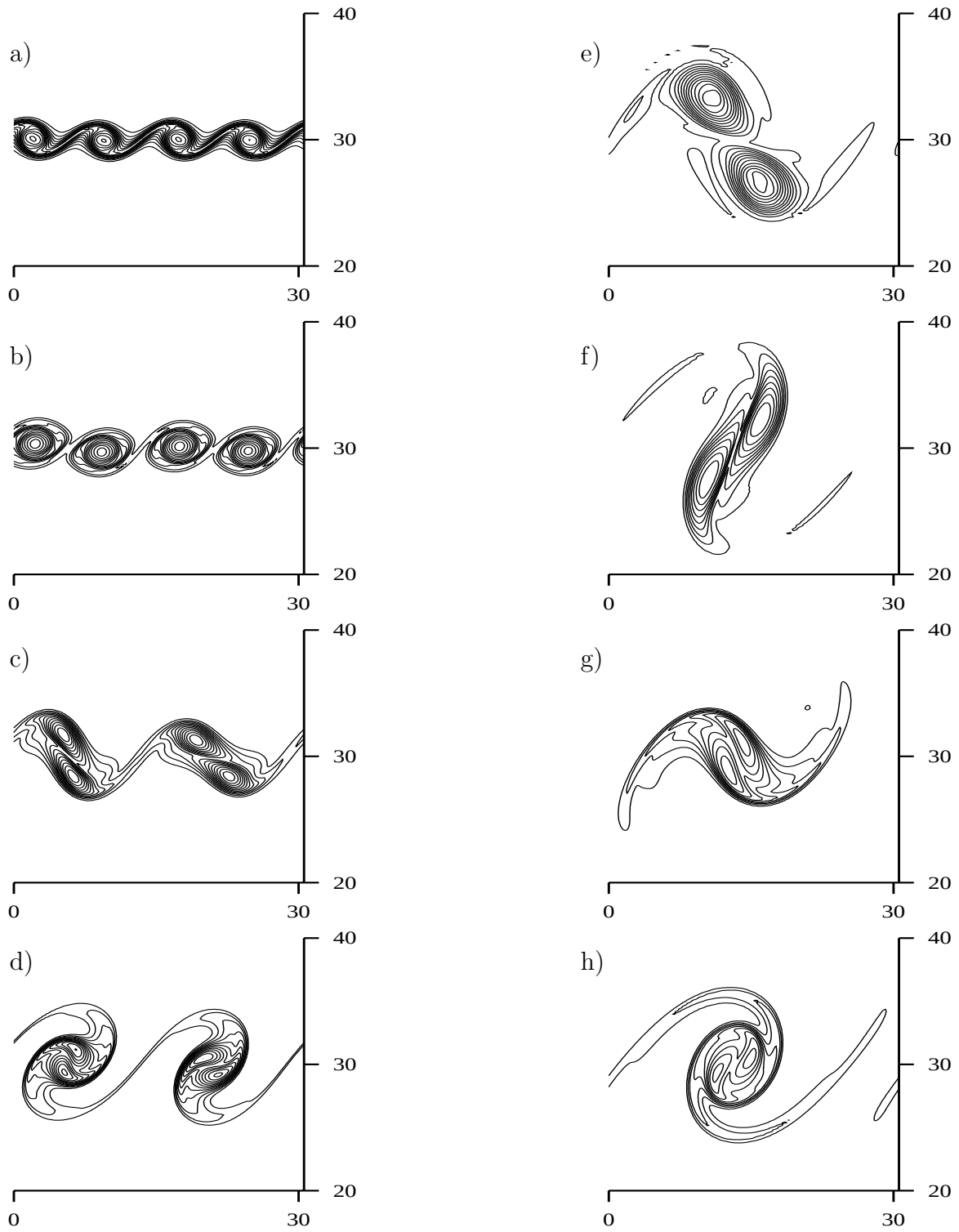


FIG. C.2 – Champ de vorticité d'une couche de mélange sur un maillage inhomogène pour $n_y = 129$ et $\beta = 5$ à différents instants : a) $\bar{t} = 10$, b) $\bar{t} = 17$, c) $\bar{t} = 26$, d) $\bar{t} = 33$, e) $\bar{t} = 62$, f) $\bar{t} = 70$, g) $\bar{t} = 80$ et h) $\bar{t} = 88$ avec $\bar{t} = 2t \frac{U_1 - U_2}{\delta_w}$.

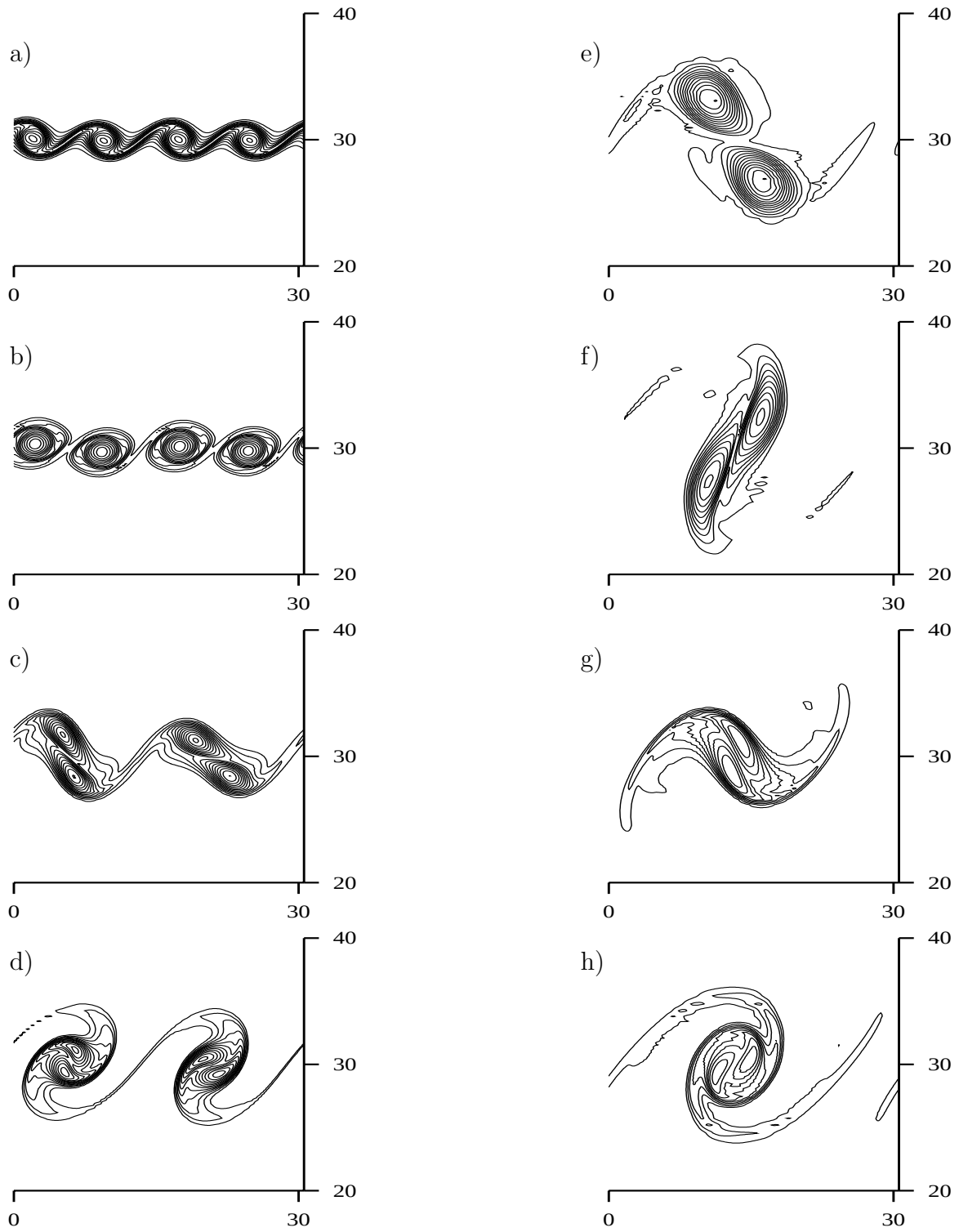


FIG. C.3 – Champ de vorticité d’une couche de mélange sur un maillage inhomogène pour $n_y = 65$ et $\beta = 2.35$ à différents instants : a) $\bar{t} = 10$, b) $\bar{t} = 17$, c) $\bar{t} = 26$, d) $\bar{t} = 33$, e) $\bar{t} = 62$, f) $\bar{t} = 70$, g) $\bar{t} = 80$ et h) $\bar{t} = 88$ avec $\bar{t} = 2t \frac{U_1 - U_2}{\delta_w}$.

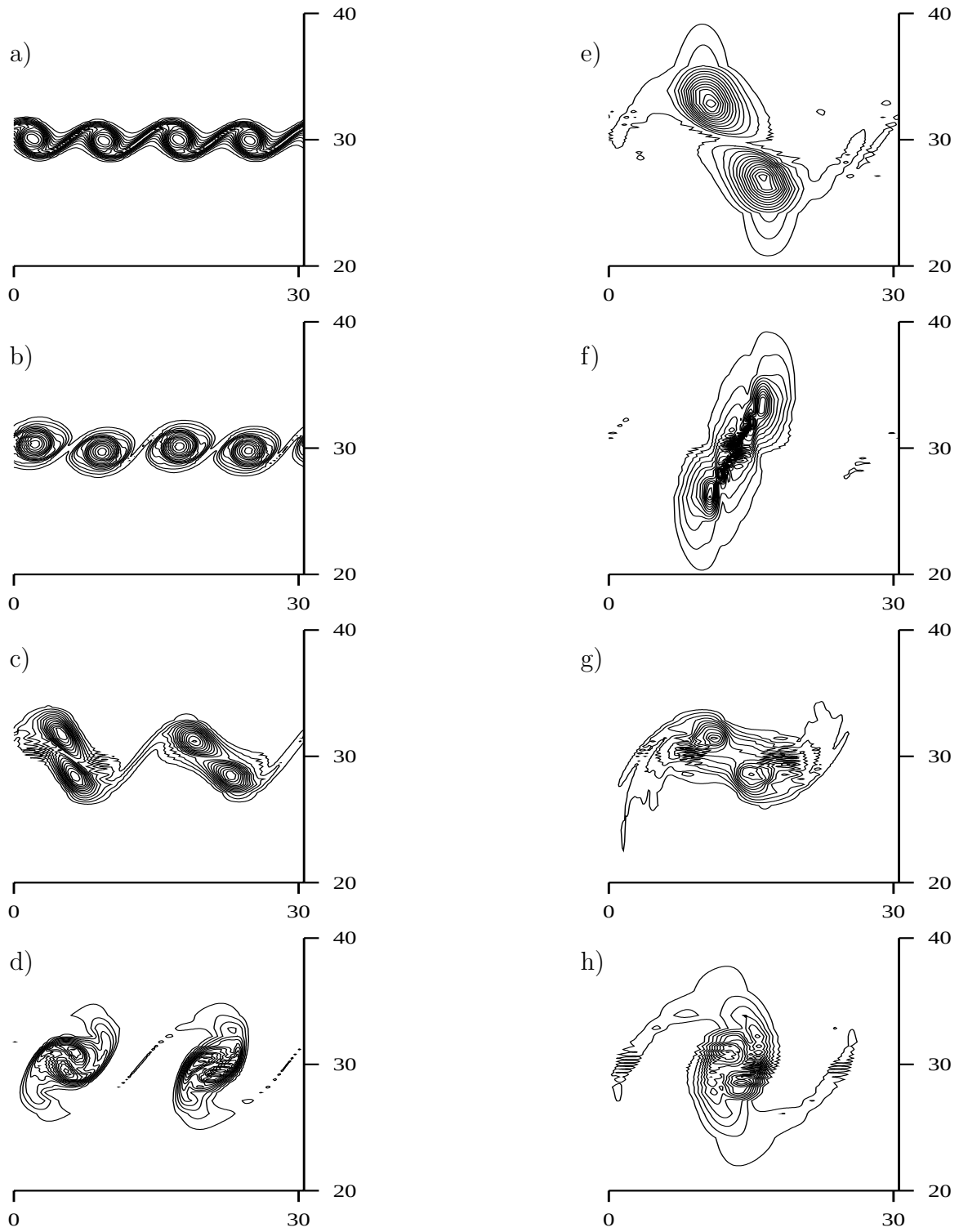


FIG. C.4 – Champ de vorticité d'une couche de mélange sur un maillage inhomogène pour $n_y = 65$ et $\beta = 1.2$ à différents instants : a) $\bar{t} = 10$, b) $\bar{t} = 17$, c) $\bar{t} = 26$, d) $\bar{t} = 33$, e) $\bar{t} = 62$, f) $\bar{t} = 70$, g) $\bar{t} = 80$ et h) $\bar{t} = 88$ avec $\bar{t} = 2t \frac{U_1 - U_2}{\delta_w}$.

Annexe D

Articles

Compact schemes for the DNS incompressible flows : in what context is the quasi-spectral accuracy really useful ?

In Proc. IV Escola de Primavera de Transição e Turbulência,
Porto Alegre, RS, Brazil, 27/9-1/10 2004

Direct numerical simulation of a spatially evolving flow from a asymmetric wake to a mixing layer.

Acte de congrès du sixième Workshop Direct and Large-Eddy Simulation,
Poitiers 12-14 Sept. 2005,
Editeurs : R. Friedrich, B.J. Geurts et O. Métais.
Publié par KLUWER ACADEMIC.

Simulation numérique directe de l'influence de la forme aval d'une plaque séparatrice sur une couche de mélange.

Submitted to CRAS (2006)